

MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN EN LA ACADEMIA

LUIS RICO ROMERO

A la memoria de mi padre, quien me enseñó a trabajar y amar la ciencia

Excelentísimo Señor Presidente de la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Granada.

Excelentísimos e Ilustrísimos Señores Académicos.

Señoras y Señores.

Preliminar

Estas primeras palabras quieren expresar mi gratitud a quienes me han mostrado su confianza y prestado su apoyo para optar a la plaza de académico correspondiente de la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Granada.

También quieren evocar el recuerdo de D. Alfonso Guiraúm Martín, quien llevó a cabo una tarea ingente a favor de la educación y la ciencia en Andalucía, particularmente en Granada, donde realizó la mayor parte de su trabajo en unos años intelectualmente precarios y socialmente difíciles. Quieren manifestar el reconocimiento hacia su dedicación y magisterio, que contribuyeron a poner las bases de la investigación matemática en Andalucía y que también tuvieron implicaciones educativas. En especial desean subrayar su empeño por dignificar la enseñanza de las matemáticas y dotarla de una sólida base académica y universitaria, lo cual quedó reflejado en multitud de actuaciones, entre las cuales destaca su iniciativa para la aprobación y puesta en marcha de los estudios de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Granada, que culminó con éxito en 1964. Su trabajo como miembro de esta Academia fue una importante faceta de su actividad y de su compromiso intelectual y humano, del cual nos hemos beneficiado muchos, y algunos pocos nos hemos honrado al disfrutarlo directamente, por lo cual mantenemos una deuda de gratitud con su memoria.

Mi presencia aquí responde a mi trabajo como matemático, en especial a mi trabajo en el área de Didáctica de la Matemática, a mi experiencia y a mi investigación en este campo del conocimiento. De manera coherente con mi visión de la matemática, del conocimiento científico como tarea social y colectiva, quiero destacar que este acto es posible, principalmente, gracias a la labor realizada en España durante estos últimos años por los investigadores en Didáctica de la Matemática a quienes, de algún modo, tengo el privilegio de representar en este momento. Para mí, y creo que para esa comunidad universitaria, es motivo de satisfacción esta incorporación a una de las instituciones en las que se organiza la comunidad científica, a uno de los ámbitos en los que se lleva a cabo la creación, la crítica, la promoción y la difusión del conocimiento.

Asumo mi procedencia y mi especificidad. Me congratulo de que la Didáctica de la Matemática se considere tarea científica legítima para los académicos en su ámbito de reflexión, y que también se establezca como mérito el dominio cualificado de esta disciplina. Trataré a lo largo de estas reflexiones de argumentar, desde mi perspectiva y la de la disciplina, sobre la contribución al trabajo académico que se puede hacer desde una preocupación, especialización y preparación conjunta en matemáticas y en educación.

Planteamiento

Señores académicos, incorporarse a la Academia presupone un ejercicio general de reflexión. Integrarse en esta institución nos lleva a interpelarnos sobre las funciones que las academias tienen que desempeñar y los fines a los que razonablemente tienen que atender. El profesional que hoy día realiza su trabajo en la universidad como docente e investigador no puede menos que plantearse las responsabilidades y obligaciones que se impone al incorporarse a la Academia. Estas preocupaciones me han hecho meditar sobre la institución. Me han llevado a estudiar su historia e interesarme por los hábitos y prácticas de los académicos, me han ocupado en conocer las normas que han regulado y regulan la actividad científica de las academias. Este trabajo es resultado de esas reflexiones. He de reconocer que me he sentido sorprendido por la vitalidad de la institución, desbordado por su riqueza y diversidad y fascinado por el papel fundamental que ha desempeñado en la constitución del pensamiento moderno. La ciencia ha encontrado en la Academia, en las academias, centros libres y creativos que la han impulsado a lo largo de la historia.

Necesariamente, he tenido que seleccionar épocas, instituciones y protagonistas. Esta elección personal me ha llevado a destacar varios momentos históricos y también a centrar la reflexión sobre determinadas prácticas, vinculadas con la construcción del conocimiento y con la actividad que, como órganos públicos dedicados al bien común y mejora de la sociedad, han llevado a cabo. En particular, he querido destacar la contribución que las academias han hecho a las matemáticas y el papel activo que han desempeñado en el desarrollo de la educación.

La institución en la que nos encontramos es heredera de una tradición europea milenaria, que se ha renovado con fuerza considerable varias veces a lo largo de los siglos, protagonizando aquellos momentos en los que la ciencia ha tenido mayor dinamismo. Nos vamos a detener en cuatro de ellos, en los que la academia tiene una intensa proyección intelectual y social.

Es conocido que Platón funda la Academia en Atenas el siglo IV a. C. Este centro, dedicado simultáneamente a la formación de los jóvenes y al desarrollo y promoción del conocimiento, incluye entre sus intereses el estudio de diversas materias como astronomía, biología, matemática, teoría política y filosofía. Aunque con cambios considerables respecto de su primera época, esta Academia tuvo una extensa vida y mantuvo a lo largo de nueve siglos la influencia de la filosofía platónica.

La tradición académica se reinicia en la Italia renacentista. Diversas ciudades italianas sostienen de manera casi permanente instituciones, en las que los filósofos y científicos de la época encuentran un ámbito de reunión, discusión y comunicación. Estas academias están en competencia con las universidades medievales y trabajan para apoyar la creación de nuevos conocimientos e impulsar su difusión. Este segundo periodo de los siglos XV y XVI, enlaza con un tercer periodo ilustrado, de consolidación y madurez, que va desde mediados del siglo XVII hasta finales del siglo XVIII, cuando alcanzan el liderazgo científico y cultural sostenido por elites sociales y políticas. Durante estos siglos de construcción de la ciencia moderna las academias son grandes centros de creación y transmisión del conocimiento científico, que encauzan iniciativas y organizan con método su producción, en especial en matemáticas.

La cuarta época en la vida de las academias la situamos en el siglo XX, si bien sus raíces están en el XIX, cuando se transforman en centros estatales de promoción del saber y gestión de la ciencia, con una estructura institucional compleja y en difícil competencia con las universidades y otros organismos dispensadores del saber. En la sociedad del conocimiento la ciencia se convierte en un activo principal de las instituciones estatales, capital con el que promueven el desarrollo de la tecnología y el

bienestar de los ciudadanos. La ciencia es un factor de progreso, cuyo impulso y estructuración corresponde liderar al Estado. Las academias superan el ámbito europeo, dejan de ser centros restringidos de reunión para eruditos y pasan a convertirse en centros de gestión de la política científica, donde grupos coordinados de múltiples especialistas planifican la explotación industrial de resultados y la difusión de nuevas técnicas, con cambios significativos en las prácticas sociales.

En la consideración histórica se combinan el tema y el enfoque con que queremos abordar esta reflexión. A lo largo de su historia y con las peculiaridades de cada época, la Academia ha sido una institución socialmente comprometida con la creación del conocimiento y la búsqueda de objetividad, actividad en la que ha tenido un liderazgo indiscutible. La exigencia de que los resultados de la ciencia sean conocimiento público, la aceptación de resultados por su propio valor de verdad y sin discriminación por razón de la procedencia de sus autores, la ausencia de otros intereses distintos a los propios de la ciencia, el planteamiento de nuevas cuestiones y nuevas respuestas, y el ejercicio coherente y sistemático de la crítica son las normas que Merton (1985) estableció como específicas de la actividad científica. Como institución social podemos reconocer en la Academia un ejercicio coherente y metódico de esas normas mertonianas de comportamiento científico. Comunitarismo, universalismo, desinterés, originalidad y escepticismo son los principios que se desarrollan por vez primera en esta institución, que se reconoce organizada para el fomento del conocimiento y la búsqueda de la verdad. Estas normas surgen con la institución como principios constituyentes de un *ethos* coherente de la ciencia, y se han mantenido en sus refundaciones sucesivas (Ziman, 1986). Igualmente, subrayamos la dimensión profundamente educativa de la Academia a lo largo de su historia como actividad prioritaria, que mantiene y transmite el conocimiento filosófico y matemático, y que sostiene el buen gobierno mediante la formación de los jóvenes.

Nos proponemos argumentar que la ciencia real es resultado de una conjunción de teoría del conocimiento, especialización disciplinar, racionalidad educativa y responsabilidad política. Suponer que una teoría del conocimiento debe estar desvinculada de las nociones de bien y de valor, que el desarrollo de las ideas científicas está separado de su transmisión, que el avance de la matemática debe independizarse de su valor educativo, son algunas falacias que nos proponemos refutar. Creación de conocimiento, matemáticas, compromiso político y esfuerzo educativo son cuatro polos conectados en un sistema, cuatro grandes aportaciones que configuran un programa que la Academia asume desde su inicio. Estas ideas se han mantenido durante siglos como proyecto social y han sido compartidas por otras instituciones científicas a lo largo de la historia. A reflexionar sobre ese programa y a proponer algunas ideas de futuro vamos a dedicar esta disertación.

La Academia Griega

Hace aproximadamente 2400 años, es decir, alrededor del 387/388 a. C., Platón funda la Academia a la vuelta a Atenas de su primer viaje a la Magna Grecia. Dedicar la institución al culto de las Musas y de Apolo y la planifica como un patronato para la educación mediante la transmisión de ideas filosóficas y políticas a las generaciones jóvenes. Es el proyecto de un pensador maduro que sostiene que los hombres mejoran con el conocimiento y que éste también hace mejores a la sociedad y al Estado.

La Academia se propone como objetivos principales buscar lo verdadero y formar hombres nuevos mediante el saber y su sistematización, hombres con capacidad para renovar el Estado y para gobernar desde las ideas y el conocimiento. Se trata de la

primera institución de este tipo de la que se conserva memoria histórica. Su nombre procede del lugar en que se ubicó, los jardines dedicados al culto del héroe Academos, un lugar sagrado a una milla de las murallas de Atenas.

La educación académica forma en el arte de la política. Estimula el sentido del deber para con la sociedad y destaca la necesidad de gobernar de acuerdo con la sabiduría alcanzada por medio del estudio. Mediante esta preparación se pretende alcanzar el dominio en el gobierno de los asuntos públicos, sin necesidad de participar en la lucha por el poder. La finalidad fundamental de la formación de los académicos está en prepararse para legislar y aconsejar a los gobernantes, desde el conocimiento que proporciona el saber bien fundado.

El currículum básico de la Academia está detallado en la *República*. Las materias que lo integran varían a lo largo de los 40 años en que Platón ejerció su dirección, pero hay algunos temas invariantes a lo largo de los años. Uno de estos temas es la matemática, en la que se incluyen la astronomía y el estudio de la armonía, y la teoría política. La importancia que se asigna a la matemática en la Academia queda subrayada por la sentencia de su portada *Ἀγεωμετρος μηδεις εισιτω*, que en una traducción libre puede entenderse como “Nadie que no haya comprendido lo matemático debe tener entrada aquí”. Las ciencias exactas se consideran parte esencial del proceso que conduce a la visión final del Bien, necesarias para la formación intelectual y filosófica de los hombres aptos para el gobierno del Estado.

La instrucción seguía el método dialéctico de presentación y discusión de tesis alternativas, e incluso contrarias, sobre una misma cuestión; su finalidad no es competir sino cooperar en la búsqueda de la verdad. Las discusiones se realizan en los simposios –festines– que están reglamentados y son dirigidos por un maestro de ceremonias. También se celebran periódicamente fiestas dedicadas a las deidades protectoras. Estas actividades contribuyen a la educación de los participantes y proporcionan la satisfacción intelectual de cerrar una cuestión o profundizar en su intelección (Reale y Antiseri, 1988a; Guthrie, 1990).

En la Academia se forman personas con niveles de preparación y procedencias distintas; también se incorporan filósofos de diversas tendencias, ampliando la orientación socrática inicial. Entre los discípulos conocidos se encuentran Eudoxo de Cnido y Aristóteles. A Eudoxo se le considera un ejemplo relevante de compatibilidad entre la labor política y la científica y filosófica, y llega a tener su propia escuela. Aristóteles viaja a Atenas en 366 a. C. e ingresa en la Academia casi de inmediato; allí madura y consolida su vocación científica y filosófica. Permanece en ella hasta la muerte de Platón en el 347 a. C. y la abandona por sus desacuerdos con Espeusipo, primer escolarca sucesor de Platón en el gobierno de la Academia.

La Academia del siglo IV a. C. es una institución educativa dedicada a la construcción de conocimiento, basada en un consenso de opinión sistemático sobre la totalidad del saber. Esta institución presenta características que la hacen importante como organización. En la Academia el conocimiento es público, libre y a disposición de toda la comunidad, de hecho este principio se fomenta con el debate continuo de opiniones y teorías. No hay fuentes privilegiadas del conocimiento científico; a los argumentos teóricos y a los descubrimientos se les concede la importancia que tienen por sus méritos intrínsecos. La satisfacción del acercamiento a la verdad y el descubrimiento del bien son los impulsos que orientan la búsqueda del conocimiento. Se aspira al descubrimiento de lo desconocido, en este caso, el reencuentro con lo previamente conocido pero ya olvidado, mediante la *anamnesis*. Finalmente, se estimula el espíritu crítico, que se institucionaliza como contexto sistemático de validación.

Para el interés de nuestro argumento son cuatro los enfoques que queremos destacar de esta primera Academia. En primer lugar, el enorme esfuerzo por establecer un discurso coherente y válido del conocimiento. En segundo lugar, el papel destacado que desempeñan las matemáticas dentro de esa teoría del conocimiento y la existencia de un programa propio de investigación en matemáticas. En tercer lugar, la insistencia sobre la responsabilidad política del filósofo, como promotor y agente en la construcción y mantenimiento de un marco social basado en los principios universales de verdad y bien. En cuarto lugar, la importancia concedida a la educación como actividad social prioritaria, que mantiene y transmite el conocimiento filosófico y matemático y que sostiene el gobierno de la polis mediante la formación de los jóvenes. Búsqueda del conocimiento por la teoría, matemáticas, compromiso político y esfuerzo educativo son cuatro polos conectados en un sistema, cuatro grandes aportaciones que configuran el programa de la Academia platónica. Este programa se ha mantenido como proyecto social estable en las sucesivas refundaciones de la Academia y ha sido compartido por otras instituciones científicas a lo largo de la historia.

La metafísica como sistema conceptual organizado aparece en el pensamiento filosófico con Platón, quien cuestiona que las causas de lo físico sean físicas, que lo sensible permita explicar lo sensible. Esta premisa le lleva a abandonar lo sensible como principio explicativo y a situar éste en el plano del puro razonamiento, de lo que se puede captar con la mente y con el intelecto. Los llamados filósofos presocráticos habían intentado explicar los fenómenos mediante causas de tipo físico y mecánico. Platón argumenta que para que exista cualquier objeto físico tiene que haber una causa superior de carácter suprafísico; de este modo establece dos planos del ser, uno de ellos fenoménico y visible, el otro invisible, metafenoménico, aprehensible sólo con la mente y, por ello, puramente inteligible. La aportación principal de Platón, base del saber en la Academia, está en reconocer y establecer la distinción entre material e inmaterial, sensible y suprasensible, empírico y metaempírico. El carácter metafísico de las causas de los objetos físicos cambia las dimensiones y sentido de la realidad.

Platón denomina a las realidades inteligibles, a los entes de razón, *εἶδος* (ideas), que quiere decir *formas*, y de ahí la Teoría de las Formas o de las Ideas. Aristóteles en la *Metafísica* (1078a– 1079b), argumenta que la Teoría de las Ideas tiene su origen en la preocupación de Sócrates por las definiciones universales y la reducción a números de las definiciones que intentaban los pitagóricos. Sócrates trató de encontrar la entidad de las cosas por medio de los silogismos, pero no abstraigo las definiciones ni los universales. Platón avanzó y separó las definiciones de las cosas y les llamó ideas. Las ideas que concibe Platón no son simples conceptos o representaciones mentales sino sustancias, las ideas remiten al verdadero ser, a lo realmente existente. Lo sensible sólo se explica apelando a la dimensión de lo suprasensible, lo relativo recurre a lo absoluto, lo móvil a lo inmóvil y lo corruptible a lo eterno. Las ideas de Platón son la esencia de las cosas, aquello que hace que cada cosa sea lo que es. El mundo de las ideas se concibe como un sistema organizado y ordenado jerárquicamente; las ideas inferiores implican a las superiores y se elevan hasta llegar a la Idea que se encuentra en el vértice, Idea incondicionada, que es la Idea del Bien. Desde esta época el mito de la caverna ha ilustrado la relación entre el mundo sensible y el mundo de las ideas.

Pero ¿hay alguna evidencia de que existan estas ideas inmutables? El indicio de ello lo encuentra Platón en las matemáticas, cuyas verdades habían sido trabajadas por los pitagóricos y que eran consideradas causa del orden y de la armonía en el universo. Las matemáticas proporcionan seguridad de que existe un conocimiento independiente de la experiencia, un ejemplo de existencia de la verdad fuera del mundo sensible. También sus métodos y estructura proporcionan un modelo. Desde entonces se ha

atribuido una entidad especial a los conceptos matemáticos, una existencia platónica, posición epistemológica que ha llegado hasta nuestros días (Kitcher, 1984).

La Academia también se plantea el acceso del hombre al conocimiento, ¿cómo es posible alcanzar el conocimiento? La respuesta a las paradojas del conocimiento y la justificación de su viabilidad, vienen dadas por la noción de ἀναμνησις, reminiscencia, que interpreta el conocer como recordar algo que ya se conocía con anterioridad. La lección del *Menón*, en la que Sócrates dirige el razonamiento de un esclavo para probar la irracionalidad de $\sqrt{2}$, muestra la presencia de unos conocimientos procedentes de una vida anterior. En esta teoría los conocimientos matemáticos desempeñan un papel central en el descubrimiento de lo inteligible. Hay un desnivel entre los datos de la experiencia y las nociones matemáticas, que muestran un componente de precisión y perfección. Los sentidos sólo dan conocimientos imperfectos; aprovechando estos datos nuestra mente encuentra los correspondientes conocimientos perfectos. La mente los halla en sí misma, los obtiene por sí misma, los recuerda. Esta argumentación se sostiene en el *Fedón* y se mantiene en el *Fedro* y en el *Timeo*. En el *Teeteto* (184b–186e) se argumenta que nada que proceda de los sentidos es digno de ser llamado conocimiento:

“Por consiguiente; Teeteto, la percepción y el saber nunca podrán ser una misma cosa” (186e).

El debate y la crítica a la Teoría de las Ideas comenzó en vida de su creador, ésta no se sacralizó y fue reformulada por sus sucesores. La Teoría tuvo un amplio desarrollo, con avances y replanteamientos. Por encima de las polémicas, proporciona a los miembros de la Academia una base de pensamiento y unos supuestos desde los cuales avanzar en la reflexión y construcción del conocimiento racional.

Aristóteles comienza la *Metafísica* con una declaración de principios que es toda una provocación a la Teoría platónica:

“Todos los hombres por naturaleza desean saber. Señal de ello es el amor a las sensaciones. Éstas, en efecto, son amadas por sí mismas, incluso al margen de su utilidad y más que todas las demás, las sensaciones visuales. Y es que no sólo en cuanto a la acción, sino cuando no vamos a actuar, preferimos la visión a todas – digámoslo- las demás. La razón estriba en que ésta es, de las demás sensaciones, la que más nos hace conocer y muestra múltiples diferencias” (Met. 980a 20–25).

En la *Metafísica* se lleva a cabo una crítica sistemática de la Teoría de las Ideas y se explicitan con todo detalle sus contradicciones e inconsistencias. En esta crítica las matemáticas desempeñan un papel destacado.

Al hacer la crítica al tratamiento de las Realidades Matemáticas en la Academia, Aristóteles sostiene que la existencia de la Realidad Matemática, por encima de las cosas sensibles, lleva a contradicciones lógicas (Met. 998a 5–20). Las Realidades Matemáticas existen pero no separadas de las cosas sensibles y actualmente; existen potencialmente, en la medida en que se pueden considerar objetos de reflexión. Su actualización resulta del acto de abstracción o separación efectuado por el matemático (Met. 1078a 28–31). En términos actuales, observamos que aborda las dificultades que surgen de relacionar los conceptos matemáticos con los fenómenos de los que proceden, en las que trabajará la fenomenología de las matemáticas (Freudenthal, 1983).

La teoría del conocimiento que surge en la Academia da lugar a una reflexión sobre la naturaleza y esencia de las cosas, sobre los fenómenos y sus causas, sobre el conocimiento, sus posibilidades y sus fundamentos; también dedica gran parte de esta reflexión al conocimiento matemático, a la naturaleza de sus entes, a sus métodos de

prueba y argumentación y al planteamiento y solución de sus problemas. Los académicos plantean interrogantes sobre la naturaleza del conocimiento matemático cuya respuesta definitiva aún no hemos encontrado, y avanzan soluciones que muestran la profundidad de sus conocimientos filosóficos y matemáticos.

Heath (1981) señala tres contribuciones de la Academia de Platón a la filosofía de las matemáticas: la noción de hipótesis, (*República*, 510 c–e), los métodos de demostración (*República*, 511 a–d), y la preocupación por las definiciones (*Fedón*, 115e). Platón adopta la noción de hipótesis y le proporciona sentidos diversos.

Si bien Platón no se considera especialista en matemáticas, sí es cierto que impulsa su estudio mediante la inclusión de problemas y discusiones a lo largo de su obra y por el estímulo que proporciona a sus discípulos para profundizar en la materia. Kline (1992) destaca que casi todas las obras matemáticas importantes del siglo IV a. C. se deben a pensadores vinculados con la Academia, compañeros o discípulos de Platón.

Teodoro de Cirene, mostró la irracionalidad de los radicales cuadráticos desde $\sqrt{3}$ a $\sqrt{17}$. Teeteto amplía el estudio de los irracionales; considera dos líneas cualesquiera cuyos cuadrados son conmensurables pero cuyos lados no lo son y establece que algunas combinaciones de esas líneas –sus medias aritmética, geométrica y armónica– no son conmensurables al cuadrado con las líneas dadas. En el Libro X de los *Elementos* se desarrollan estas ideas.

Menecmo descubre las secciones cónicas y resuelve el problema de dos medias proporcionales mediante intersección de una parábola y una hipérbola. Arquitas resuelve el problema de la duplicación del cubo mediante un sistema dinámico y Dinóstrato, discípulo de Platón, conoce la cuadratriz y su utilidad para responder al problema de la cuadratura. Si bien Platón rechaza las demostraciones dinámicas en geometría y sólo admite las construcciones con regla y compás, estas curvas y las pruebas asociadas fueron conocidas en la Academia.

Eudoxo de Cnido fue miembro relevante de la Academia y conocido por su participación en el debate sobre la Teoría de las Ideas; también es, por sus aportaciones, uno de los matemáticos más brillantes de la antigüedad, con escuela propia. Eudoxo introduce la idea de magnitud continua. Trata los irracionales como magnitudes –longitudes, ángulos, superficies, volúmenes– que pueden variar de modo continuo, y no los considera como números. Eudoxo define la razón de dos magnitudes y, a partir de ahí, establece las proporciones como sistema para comparar razones; esto le permite trabajar con razones de magnitudes conmensurables o inconmensurables. Los conceptos de razón y proporción quedan así ligados a la geometría y no a la aritmética, y ofrecen fundamentos lógicos para estudiar las razones inconmensurables. Se establece aquí la separación entre números y geometría. La brillante aportación de Eudoxo, junto con su sistematización en el Libro V de los *Elementos*, se considera determinante para el desarrollo posterior de las matemáticas durante dos milenios. Hasta la elaboración del concepto de número real por Dedekind y Weierstrass no se supera el planteamiento de Eudoxo sobre la inconmensurabilidad de magnitudes (Guzmán, 1983).

Aristóteles sistematiza y clasifica los modos de razonamiento y muestra sus relaciones de manera deductiva. En los *Segundos Analíticos* extiende la forma deductiva de la geometría a otros ámbitos. Igualmente, en la *Metafísica* hace un estudio de la noción de infinito, descarta el infinito actual e introduce el infinito potencial.

Otras aportaciones conocidas de la Academia fueron el tratamiento dado a los poliedros regulares, también llamados sólidos platónicos, que se emplean en el *Timeo* (53e–57) como base para establecer una teoría atómica sostenida en los cuatro elementos de la antigüedad: agua, fuego, tierra y aire. Las ternas pitagóricas, las medias

entre números, y algún tratamiento a los problemas matemáticos clásicos son temas que también aparecen en las obras de Platón y de sus discípulos inmediatos.

Platón parece tener una previsión del plan de trabajo futuro de los *Elementos* ya que la Academia protagoniza el desarrollo de las matemáticas anteriores a Euclides y proporciona gran parte del material de los *Elementos*. En este ámbito se aborda el problema de la medida común a dos magnitudes y de la inconmensurabilidad. Con la transformación del número en razón se consigue dar respuesta a los problemas clásicos de la geometría –cuadratura del círculo, duplicación del cubo, trisección del ángulo –, si bien hay que auxiliarse de curvas que no se pueden construir con regla y compás y de sistemas dinámicos. Pero las soluciones a los problemas también quedan lastradas por limitaciones técnicas. La principal es la subordinación del número a la geometría, impuesta por la conversión del número en razón, lo cual supone un retraso en la aparición del álgebra y el tratamiento de sus problemas mediante técnicas geométricas. La limitación asumida de considerar válidas sólo aquellas demostraciones que se realicen con regla y compás, dificulta igualmente el desarrollo de métodos constructivos y de nuevas aportaciones técnicas.

Pero la Academia no es sólo un centro de estudio e indagación preocupado por la sabiduría. La Academia sostiene que el objetivo último del conocimiento abstracto es el gobierno del mundo real. No hay en la historia de las teorías del conocimiento ninguna otra que sea tan ambiciosa. La Teoría de las Ideas sostiene que el fundamento último del sistema completo, la base de toda la derivación abstracta es la forma del Bien, que debe sostener el sistema público de gobierno. La reflexión filosófica culmina en un compromiso ético, que retorna a sus raíces socráticas y subordina todo el sistema de ideas al servicio de la comunidad y del gobierno de los asuntos públicos.

Los gobernantes dirigirán los asuntos comunes tomando como base una intuición unificada de los principios. Esta intuición se adquiere mediante un largo entrenamiento intelectual, basado en el razonamiento matemático, que limita su dependencia para con los sentidos y estimula la confianza en el razonamiento abstracto. Esta formación la han de adquirir los futuros gobernantes por medio de un programa educativo riguroso y metódico, en el que la reflexión sobre las formas sea permanente, lo cual queda garantizado con el trabajo matemático sistemático (Rep. 502c– 506c).

La esencia de la educación griega consiste en la acuñación de los individuos según una concepción amplia y culturalmente fundada del ser humano en la forma de la comunidad (Jaeger, 1957). Uno de los valores de esta παιδεία está en la noción de armonía, como relación de partes al todo, que conecta con el concepto matemático de proporción. La armonía en el mundo es un concepto complejo que incorpora nociones muy diversas: concordancia de los sonidos, rigor de los números, regularidad geométrica y articulación tectónica; abarca la arquitectura, la poesía, la retórica y la ética. El sistema griego de educación basado en siete disciplinas, que dará luego paso al trivium y quadrivium, incluye las matemáticas desde el siglo IV a. C.

Con la incorporación de las matemáticas al ámbito educativo se incrementa el ethos educador, basado en el planteamiento normativo y riguroso de la disciplina. Platón propone una nueva paideia éticamente fundada, distinta a la de los sofistas; por ello la educación en la Academia destaca las enormes posibilidades educativas de la ciencia pura y convierte las matemáticas en una propedéutica para la filosofía. En el *Menón*, Platón muestra la mayeútica como el arte de enseñar y ejemplifica cómo el planteamiento de los problemas es fundamento del arte de aprender. El verdadero aprender es, por tanto, un tomar muy especial, en el cual el aprendiz recupera sólo aquello que en el fondo ya tiene. Enseñar corresponde a este aprender, consiste en un

dar al discípulo las indicaciones necesarias para que recuerde y encuentre lo que ya conoce. La aspiración a la verdad no es otra cosa que el despliegue del alma y del contenido que en ella se encierra por naturaleza.

En un análisis de la ματεσις griega, de “lo matemático”, Heidegger (1975) precisa que con este término se designan las cosas en cuanto que son aprehensibles, en cuanto que son objeto de aprendizaje. El verdadero aprender, en sentido griego, consiste en un tomar las cosas en el cual, el que toma, lo hace sólo de aquello que en el fondo ya tiene:

“Estando, pues, la naturaleza toda emparentada consigo misma y habiendo el alma aprendido todo, nada impide que quien recuerde una sola cosa –eso que los hombres llaman aprender – encuentre él mismo, todas las demás, si es valeroso e infatigable en la búsqueda. Pues, en efecto, el buscar y el aprender no son otra cosa en suma, que una reminiscencia” (Men. 81d).

Aprender es un modo del tomar y del apropiarse; significa apropiarse de algún modo de una cosa y disponer de ella. Aprender es siempre conocer, pero hay un aprender más originario sobre las cosas; cuando tomamos conocimiento de forma explícita y de manera determinada, entonces introducimos en el conocimiento algo que de verdad ya tenemos. Lo matemático es aquello de las cosas que ya conocemos, no es algo que extraemos de las cosas sino algo que llevamos en nosotros mismos:

“Lo matemático es aquella posición fundamental en la cual nos pro-ponemos las cosas en aquel modo en que ya nos son dadas, y deben ser dadas. Por eso lo matemático es el presupuesto básico del saber de las cosas” (La pregunta por la cosa, p. 71).

De ahí que Platón se proponga con la matemática despertar el pensamiento del hombre. El valor de esta ciencia no reside en su carácter práctico ni en sus aplicaciones a problemas reales, sino en la introspección intelectual y en su camino de abstracción para el mundo de las ideas

Cerramos así el ciclo. La Teoría de las Formas sostiene que la auténtica realidad es la realidad inteligible de las Ideas. Dentro de ese mundo de Ideas las Realidades Matemáticas desempeñan un papel fundamental. Pero el fin último del conocimiento es el gobierno de la comunidad, la gestión necesaria del bien público, de ahí la importancia de la educación de los futuros gobernantes y el interés político de su preparación adecuada mediante el ejercicio de las disciplinas abstractas, de las cuales las matemáticas son el paradigma. Como el Bien es la Idea suprema se convierte en objetivo principal de gobierno y marca una orientación ética a las instituciones educativas. La Academia de Platón proporciona un modelo para las instituciones científicas durante varios siglos y mantiene un enorme atractivo para filósofos de la ciencia, matemáticos y educadores.

La Academia Renacentista

En 1462 Cosme de Médici, gobernante de Florencia, encomienda al humanista Marsilio Ficino la organización de un centro dedicado al estudio y traducción de la obra de Platón. Esta fecha marca convencionalmente el inicio de una nueva Academia Platónica, que también se conoce con el nombre de *Academia de Ficino* o *Academia Florentina*. Esta institución surge con la protección de los Médici y propone una orientación cultural acorde con las nuevas corrientes intelectuales de la época, más abierta que la tradición escolástica medieval que había sostenido a las universidades durante varios siglos.

El renacer de la Academia, sobre todo en Italia, se produce en un periodo de cambio cultural, social, político y moral que transcurre durante los siglos XV y XVI en los países de Europa Occidental, destacadamente en los estados italianos, al que se conoce con el nombre de Renacimiento. Estos cambios se corresponden con una modificación del pensamiento filosófico y tienen expresión en la literatura, el arte, la ciencia, la técnica y la religión.

El término Renacimiento expresa la recuperación de la antigüedad y la cultura clásica. Este nuevo talante produce una regeneración y reforma espiritual, un esfuerzo de revivificación por el retorno a las fuentes. El descubrimiento de la antigüedad clásica implica un movimiento de revisión, del que surgirá la ciencia moderna

El humanismo se inicia en el siglo XV; el término sirve preferentemente para referirse al área cultural de los estudios clásicos. En la cultura latina, *humanitas* significa educación y formación del hombre. El humanismo renacentista se considera un programa cultural y pedagógico centrado en sus comienzos en los estudios literarios. Desde mediados del siglo XIV y en el siglo XV se consideran las culturas clásicas, griega y latina, como referentes y paradigmas de las disciplinas literarias, en especial, de la filosofía y de la reflexión política. Renacimiento y humanismo son coetáneos, muestran facetas de un mismo momento histórico. Ambos movimientos comprenden los siglos XV y XVI, con un preludeo a finales del siglo XIV. Durante el siglo XV predomina el pensamiento sobre el hombre y en el XVI el pensamiento sobre la naturaleza. En España coincide con el gobierno de los Trastámara y los primeros Austrias.

Son varios los hechos relevantes que ocurren en esta época y la condicionan, entre los que destacamos sólo unos pocos conectados con la academia renacentista.

Los grandes viajes y descubrimientos de portugueses, aragoneses y castellanos en estos siglos llevan a la renovación de las técnicas náuticas y del arte de la navegación. Las necesidades de la navegación obligan a un desarrollo de la matemática y de la astronomía junto con enormes esfuerzos en el arte de la cartografía.

La introducción de nuevas técnicas de impresión mecánica y el uso de tipos móviles es un acontecimiento que contribuye a la difusión de los escritos eruditos o científicos, de los sabios de la época o de la antigüedad.

La Reforma desencadena una crisis religiosa, política y social. Lutero enuncia y publica sus tesis en 1517 y el Concilio de Trento concluye en 1545. En este periodo se produce la división de la cristiandad occidental en dos mundos con visiones religiosas contrapuestas: catolicismo y protestantismo.

Si la revolución científica comienza con Galileo, esta revolución tiene su base en el desarrollo científico del Renacimiento. Se trata de épocas culturalmente diferenciadas. El Renacimiento tiene sus raíces en la Edad Media y tiene su epílogo en el comienzo de la revolución científica. Russell (1973a) destaca varias diferencias significativas con la Edad Media, que marcan la transición entre ambos periodos:

Cambio de una cultura clerical hacia otra laica, con prioridad en los temas y en los valores; aparición de nuevas instituciones científicas y académicas.

Desplazamiento del control cultural desde la iglesia a los estados.

Evolución de los gobiernos, en manos de reyes o príncipes, a democracias o a tiranías. La aristocracia feudal pierde importancia, primero política y luego económica.

Incremento del poder del Estado por el refuerzo de sus funciones. La resistencia hacia la autoridad eclesiástica viene acompañada por la aceptación de la autoridad científica.

Temas fundamentales del pensamiento renacentista son: regreso al mundo clásico en literatura, arte, filosofía y ciencia; prioridad hacia la formación de personalidades vigorosas, para lo cual la cultura es una herramienta; consideración de la naturaleza como ambiente propio del hombre o como lugar de Dios, con rechazo de la idea de que la naturaleza es sólo la sombra del mundo ideal; esfuerzo por explicar la estructura de la naturaleza con ayuda de fuerzas o causas puramente naturales, progresivo abandono del apoyo o la referencia a principios trascendentes o a otras fuentes de autoridad, principalmente religiosa; prioridad del experimentalismo y la explicación matemática de los fenómenos.

El Renacimiento recupera la confianza en la creatividad del hombre. Para sus protagonistas la voluntad es la capacidad efectiva del hombre por integrar su propia acción en el mundo de la experiencia; es fuerza, energía e impulso para actuar. La educación debe orientarse a desarrollar la voluntad del hombre mediante el cultivo de todas sus potencialidades. Muchos temas del Renacimiento estaban ya en la filosofía, la ciencia y la cultura medievales, pero aparecen con un nuevo acento y vigor.

Las ciencias acaban siendo consideradas como instrumentos humanos para el dominio de las fuerzas naturales, es decir, instrumentos de liberación. La separación entre teoría y práctica, entre ciencia y técnica, desaparece. El esfuerzo por encontrar conexiones e implicaciones prácticas impide que la ciencia se esterilice como en la antigüedad. Las investigaciones individuales muestran la importancia de la matemática para el estudio organizado de los fenómenos mediante el ejercicio de la experiencia. Las líneas y los números resultan idóneos para formular esquemas precisos de cada fenómeno, para establecer con exactitud relaciones efectivas. La matemática surge como instrumento indispensable para leer e interpretar el libro de la naturaleza.

En este contexto general, los príncipes italianos de la segunda mitad del siglo XV comienzan a celebrar con regularidad en sus palacios, reuniones de sabios y eruditos a las que llaman *academias*. Las academias reciben el nombre de algún miembro destacado o de su fundador. En ellas hay una gran participación de filósofos, literatos, artistas y científicos; no se dan grados rígidos ni separaciones jerárquicas, no hay, formalmente, maestros ni discípulos. Las academias recogen y, de algún modo, encauzan el resurgimiento del platonismo. El platonismo que llega a los renacentistas es el neoplatonismo, posterior a las críticas de Aristóteles, impregnado de multitud de interpretaciones herméticas y cristianas. En Italia la recuperación de Platón la protagonizan Nicolás de Cusa, la Academia de Florencia y Pico de la Mirándola. Marsilio Ficino (1433-1499) lidera el primer momento de la *Accademia Fiorentina*, que aporta una nueva orientación al pensamiento humanístico. De esta época son la *Accademia de Nápoles* y la *Accademia de Roma*. En Milán hubo una Academia donde trabajó Leonardo da Vinci y, entre 1496 y 1499, Luca Pacioli. Estas Academias destacan por su interés en las discusiones científicas y dan paso a las Academias oficiales posteriores. En el siglo XVI aparecen la *Accademia Secretorum Naturae*, fundada en 1560, la *Accademia del Cimento* en Florencia y la *Accademia dei Lincei*, fundada en Roma en 1603, a la que pertenece Galileo.

El término *Accademia* se convierte en una denominación genérica durante el siglo XVI para referirse a instituciones especializadas, con base filosófica en el platonismo y dedicadas a la formación en ramas específicas del conocimiento y de la técnica, también a la divulgación de la ciencia. Las Academias son instituciones promovidas por poderes políticos locales que tratan de integrar a los grupos científicos emergentes; estas instituciones estudian el conjunto de formulaciones neoplatónicas sobre el conocimiento y transmiten estas teorías con suficiente coherencia para fundamentar el avance en otros campos, entre ellos la ciencia (Mieli, 1954; Reale y Antiseri, 1988b).

Conectada con las preocupaciones intelectuales y técnicas de la época es de interés destacar la *Academia Matemática* española de finales del siglo XVI. Las necesidades científicas y técnicas en la monarquía española de este siglo eran muy superiores al número de científicos y técnicos existentes para su atención. El arquitecto Juan de Herrera se propone convencer al rey Felipe II para que instituya en la corte un centro de formación. El reconocimiento del monarca como rey de Portugal en 1581 le puso en contacto con cosmógrafos portugueses y facilitó la selección de profesores para la organización del centro, capaces de sistematizar los conocimientos de la época y contribuir al desarrollo de sus aplicaciones técnicas. En 1582 el rey, como príncipe renacentista, expide una cédula en la que instituye una “academia de matemáticas, arte de arquitectura y otras ciencias”. En 1584 la Academia se instala en Madrid y se publican sus estatutos redactados por Herrera. Señalan los estatutos que “los que deseen dedicarse a las artes mecánicas, los astrólogos, los gnómicos, los perspectivas, los músicos, los arquitectos, los fortificadores, los niveladores y los artilleros”, deberán conocer, además de las obras específicas para cada oficio, la Geometría de Euclides. Esta Academia tuvo un éxito apreciable y mantuvo su actividad durante los primeros años del siglo XVII (López Piñero, 2002).

Durante los siglos XV y XVI los platónicos dominaron las Academias, en especial la *Academia Florentina*; los aristotélicos dominan las universidades, en particular las de Padua y Bolonia. Revive el estudio de Platón y la rivalidad entre aristotélicos y platónicos favorece el debate y la independencia intelectual. En esta eclosión de nuevas ideas y recuperación de textos a comienzos del Renacimiento, el naturalismo aristotélico encuentra dificultades para su desarrollo, obstaculizado por varias limitaciones. Entre ellas está la excesiva valoración de la lógica y la exclusión de las matemáticas en la investigación naturalista, también la aceptación de la física aristotélica como perfecta y de sus pretensiones explicativas, como la de las acciones recíprocas entre los cuerpos, sobre postulados animistas. Las investigaciones aristotélicas tuvieron un carácter general y abstracto, incapaz de contar con los resultados obtenidos mediante el trabajo práctico y técnico. Los platónicos contraponen el uso de la matemática al de la lógica para el conocimiento de los fenómenos.

El programa matemático de las academias renacentistas tiene su origen en algunas ideas de la Baja Edad Media. Una de ellas es el principio de que todas las diferencias reales pueden reducirse a diferencias en la categoría de cantidad. Se postula que la intensidad de una cualidad como el calor puede medirse tan exactamente como la magnitud de una cantidad. Este principio contribuyó al empleo de la matemática en la física. Para Aristóteles, cantidad y cualidad son categorías diferentes. Un cambio de cantidad se produce por adición de partes homogéneas, continuas o discontinuas; la mayor contiene en acto a la menor y no hay cambio de especie. Una cualidad, sin embargo, admite grados de intensidad y sus cambios no se producen por adición o segregación de partes. En el siglo XIV Scotus y Ockham sostienen que la intensidad de una cualidad se puede medir con números, al igual que una magnitud de cantidad. La física matemática, que se inicia en esta época, reduce las diferencias cualitativas de las especies a diferencias de estructura geométrica, de número y de movimiento, es decir, a diferencias de cantidad, y las matemáticas disponen de un mismo tratamiento para todas las cantidades. El origen de estas ideas está en Pitágoras y en el *Timeo* de Platón donde se sostiene que Dios, artífice del universo, es un geómetra. Los neoplatónicos son responsables de su desarrollo y difusión en el Renacimiento. La trascendencia de este renacer platónico del siglo XVI se reconoce entre los historiadores de la ciencia como

un estímulo eficaz para el estudio de la naturaleza y determinante para el desarrollo de la ciencia (Hall, 1985).

Nuevos métodos se desarrollan inicialmente en conexión con la idea de las relaciones funcionales. Se trata de una idea complementaria a la de variaciones concomitantes entre causa y efecto; en su comienzo se desarrolla sin realizar medidas, sólo como principio. En su origen se encuentran dos métodos para hacer eficaz esta idea. El primero dio lugar al desarrollo del álgebra: para conseguir generalidad se sustituían los números por letras con el fin de distinguir las cantidades de las variables; en una primera etapa las operaciones se describen con palabras en vez de símbolos. El objetivo inicial era proporcionar expresión cuantitativa a los cambios de cualidad: expresar los grados en que una cualidad aumentaba o disminuía numéricamente en relación a una escala que se fija previamente. Los avances de esta técnica matemática comienzan con el álgebra y están vinculados con la resolución de problemas.

El segundo método surge del esfuerzo por expresar las relaciones funcionales por medio de gráficas basadas en métodos geométricos. Para ello se utilizan coordenadas rectilíneas, antecedentes de las representaciones cartesianas. En el siglo XIV se intenta expresar el equivalente cuantitativo de las diferencias cualitativas lo cual lleva a descubrimientos originales respecto de la matemática y los hechos físicos. De este modo se da gran impulso a la medida de magnitudes físicas, siempre condicionada por la exactitud de los instrumentos técnicos disponibles. En el siglo XV, cuando la iniciativa científica pasa a Italia y Alemania, avanzan estas ideas. Cusa sostiene que el aire puede pesarse mediante un higrómetro y señala que el método de pesada debe emplearse para establecer las proporciones de los elementos primarios en cada uno de los metales; sus conclusiones implican la conservación de la materia (Crombie, 1979).

Como desarrollo del primero de los métodos y técnicas antes mencionados se produce un enorme progreso en álgebra, que se considera una de las aportaciones más brillantes del Renacimiento italiano. Luca Pacioli (1445-1514) trabajó en la *Accademia de Milán* y enseñó en varias ciudades italianas. Los matemáticos italianos abordaron el estudio de la ecuación de tercer grado y la resolvieron. Scipione del Ferro y Tartaglia hicieron las principales contribuciones para encontrar la solución general de la ecuación de tercer grado. Cardano y Tartaglia se disputaron la autoría del método de resolución, y ello incrementó el interés por el estudio del álgebra. Bombelli aportó la consideración más general de los problemas de resolución de ecuaciones y del estatus de las soluciones imaginarias. A finales del Renacimiento, el francés Viète reelaboró el lenguaje cósico, propio del estilo algebraico de los autores italianos, e introdujo gran parte de la moderna notación simbólica, dando paso al nuevo estilo de representación simbólico literal en el álgebra. Pero aún hay que esperar a Descartes para el desarrollo técnico de las representaciones gráficas en la expresión de relaciones, con la invención de la geometría analítica (Kline, 1992).

Los avances en tecnología, el invento de nuevos instrumentos de medida y la precisión de esas medidas incorporan avances considerables; se llevan a cabo progresos empíricos y el hábito experimental conduce al desarrollo de aparatos especiales. En el siglo XVI se produce un éxito progresivo de la matemática en la resolución de problemas físicos concretos. Los geómetras desarrollan la idea de emplear medidas que requieren instrumentos de precisión, para establecer relaciones y aplicar métodos deductivos que pongan a prueba empírica las demostraciones matemáticas. Por el uso creciente de conceptos y representaciones matemáticas la física evoluciona desde las explicaciones cualitativas de Aristóteles a las formulaciones matemáticas de Arquímedes y al método experimental.

El programa educativo de las academias renacentistas es el del humanismo, con el cultivo de la tolerancia, curiosidad intelectual y probidad, espíritu crítico, moderación y equilibrio, actitud dialogante y apertura a nuevas ideas. Erasmo de Rotterdam y Luis Vives se consideran los principales representantes de la reflexión sobre los valores y preocupaciones educativas del Renacimiento. Vives propone una generalización de la enseñanza y del saber, con objeto de hacer eficaces y prácticos los conocimientos. Estas preocupaciones van acompañadas por concepciones políticas y sociales que sostienen que todos los hombres tienen el mismo valor, las autoridades deben estar al servicio de los demás y sometidas al bien común. La nueva autoridad renacentista, que se consolida en estos años es la ciencia, que marca diferencias considerables con la autoridad feudal y eclesial del periodo anterior. La autoridad de la ciencia no penaliza a aquellos que la rechazan, sino que prevalece por su apelación intrínseca a la argumentación. Esta autoridad es fragmentaria y parcial, no se asienta sobre un sistema completo que abarca todas las facetas de la vida humana, no postula ningún tipo de vida futura. La ciencia se pronuncia sólo sobre aquellas cuestiones que han sido objeto de indagación, mediante seguimiento sistemático y cuando dispone de datos que puedan contrastarse. Los enunciados de la ciencia no son absolutos e inmutables, son tentativos y están expuestos a modificaciones.

La época del Renacimiento se manifiesta en sus personajes, con su integración de ideas religiosas, filosóficas y científicas y, a menudo en pugna, el cultivo de valores educativos y políticos. Dos son los protagonistas que mejor expresan las fortalezas y debilidades del conocimiento y la ciencia de la época, de sus valores y sus contradicciones, junto con la vinculación al renacer de la Academia: Leonardo y Galileo.

Leonardo da Vinci (1452-1519) es uno de los protagonistas más significativos del Renacimiento. Vinculado a sus principios filosóficos y científicos y miembro y colaborador de varias Academias italianas, se le suele considerar prototipo del sabio humanista y platónico. Leonardo estudia matemáticas y perspectiva. Se interesa por la anatomía y la botánica, trabaja en geología, mecánica y arquitectura, es pintor y trabaja como ingeniero.

En una primera estancia en Milán entre 1482 y 1499, colabora con la Academia, trabaja para Ludovico Sforzza y escribe diversos tratados. Las ilustraciones que realiza de los poliedros para la *Summa Aritmética* de Pacioli son de esta época. El pensamiento de Leonardo se basa en el idealismo platónico: acepta el paralelismo entre macrocosmos y microcosmos y lo postula entre el hombre y el universo. Acepta que el orden de la naturaleza procede de Dios y que es un orden mecánico y necesario. En su práctica matemática toma como principal referencia a Arquímedes; el pensamiento matemático sirve para interpretar el orden mecánico de la naturaleza. Rechaza que el saber se produzca por inspiración; tampoco acepta la antigüedad o la autoridad como fuentes de conocimiento indiscutibles. Por ello elimina de los fenómenos naturales la presencia de fuerzas animistas, místicas o espirituales. Considera que la necesidad es maestra y guía de la naturaleza. La necesidad es argumento e invención en la naturaleza, así como freno y regla eterna.

Como prototipo de hombre renacentista, Leonardo se propone encontrar una comprensión rigurosa de los fenómenos y se orienta hacia un naturalismo matemático experimental. Su indagación sobre la naturaleza es acorde con su mentalidad de ingeniero. No es un científico en el sentido que tendrá el término después de la revolución científica; careció de sistematización y destacó por sus intuiciones brillantes y sus perspectivas geniales (Reale y Antiseri, 1988b).

Pero es, sin duda, Galileo Galilei (1564-1642) quien ofrece el compendio de la restauración académica y del impulso científico, intelectual y moral que implicó el Renacimiento, y así contemplamos su figura. Galileo expresa la culminación de esta época y es su mejor exponente en el campo de la ciencia, si bien los historiadores y filósofos de la ciencia también lo consideran como el iniciador, junto con Descartes, de la modernidad, al ser uno de los impulsores de la revolución científica (Toulmin, 2001).

La vinculación de Galileo con la *Accademia Fiorentina* y con la *Accademia dei Lincei* está bien documentada. En 1588 prepara un curso para la *Accademia Fiorentina*: *Sobre la figura, lugar y tamaño del infierno de Dante*; para esta defensa de la topografía del infierno plantea una serie de problemas geométricos concretos que trata con habilidad matemática (Reale y Antiseri, 1988b). Sus dos obras más polémicas e importantes las escribe con formato de diálogo, siguiendo el estilo de Platón, con tres personajes: Simplicio, representante del aristotelismo, Salviati, erudito defensor de la posición copernicana, y Sagredo, representante del humanismo y de un espíritu liberal y libre de prejuicios.

La primera de ellas es el *Diálogo sobre dos sistemas máximos del mundo, tolemaico y copernicano*, publicada en 1630. El libro está dedicado a defender la superioridad de la teoría heliocéntrica de Copérnico sobre la geocéntrica de Ptolomeo mediante argumentos empíricos y racionales, sostenidos por razonamientos matemáticos. Los supuestos filosóficos se sustentan en la tradición platónica y se dirigen a la crítica de los tipos de movimientos de Aristóteles. Recordemos que la teoría de Copérnico no fue criticada sólo por la Iglesia Católica; Lutero, Calvino y Melachton también la combatieron por contraposición con la literalidad de algunos textos bíblicos: Eclesiastés (1, 4-5), Josué (10-13) y el Salmo 93.

La obra transcurre en tres jornadas. En la primera jornada Galileo sostiene, basándose en sus observaciones, que la Tierra y la Luna tienen la misma naturaleza e infiere que, si la Luna se mueve, la Tierra también puede moverse. Profundizando una conjetura de Leonardo, muestra la falsedad de distinguir entre física celeste y física terrestre, poniendo de manifiesto que responden a los mismos principios en la formulación del principio de inercia. En la segunda jornada se enuncia el principio galileano de relatividad del movimiento para explicar y justificar algunas de las contradicciones aparentes de la teoría de Copérnico sobre el movimiento de la Tierra. En la tercera jornada se explican las consecuencias que se derivan de suponer el movimiento de la Tierra alrededor del Sol y se discuten las fases de Venus.

Aunque la teoría de Copérnico se acepte por su mayor perfección, se produce un fuerte debate entre la interpretación instrumentalista y la interpretación realista, al cual no es ajeno el conflicto religioso. Esta obra ha pasado a la historia como origen de la mecánica clásica y por la dura condena que recibió su autor de la Inquisición. Galileo acepta retóricamente en el texto la interpretación instrumentalista, *ex suppositione*, como suficiente para el matemático, pero toda la obra es un alegato a favor de la interpretación realista.

Para Galileo la ciencia ofrece una descripción de la realidad; llega a los objetos distinguiendo entre cualidades objetivas y subjetivas de los cuerpos. La ciencia describe las cualidades objetivas cuantificables y mensurables, excluyendo aquellas cualidades que sólo están en el sujeto que percibe. Refuerza la vinculación entre teoría y práctica, considera detalladamente multitud de experiencias para sostener sus argumentos y se abre al mundo. Tampoco acepta que haya conflicto entre ciencia y religión, ya que se trata de caminos diferentes de acercarse a la verdad. La ciencia está bien definida con sus métodos demostrativos, sus logros, la fuerza que le proporcionan sus aplicaciones y la certidumbre de su desarrollo. Los conflictos entre ciencia y religión hay que

resolverlos aceptando los resultados de la ciencia, con reserva en la interpretación de textos sagrados cuando parezca que hay contradicción con los resultados de la ciencia. No sólo la ciencia es autónoma respecto de la religión sino que Galileo reclama su independencia respecto al saber tradicional y dogmático.

La segunda obra, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, publicada en 1638 en Holanda, es su obra principal y en ella establece los fundamentos matemáticos de la dinámica. Esta obra tiene también estructura de diálogo aunque con un formato más sistemático que incluye axiomas, teoremas y proposiciones. Aparecen los mismos personajes que en el *Diálogo* y Galileo se incorpora como un nuevo personaje, Académico, destacando así su vinculación con la institución académica. Este diálogo consta de cuatro jornadas. En la primera se examinan problemas generales sobre el carácter de la matemática y de su uso en la naturaleza. En la segunda jornada se abordan problemas de estática y de resistencia de materiales y reitera sus fundamentos platónicos:

“¿Qué podemos decir, señor Simplicio? ¿No debemos confesar que la geometría es el más poderoso instrumento para agudizar el ingenio y ponerlo a punto para discurrir y pensar? ¿No tenía muchísima razón Platón cuando exigía que sus alumnos, antes de nada, estuvieran bien impuestos en matemáticas?”
(Segunda Jornada, p. 244).

La tercera jornada se dedica a presentar las leyes del movimiento uniformemente acelerado y en ella encontramos la descripción de la célebre experiencia del plano inclinado. La experiencia descrita no viene dada, se construye y se elabora cuidadosamente porque la teoría lo exige; se trata de un experimento en el sentido más moderno del término. En la cuarta jornada se aplican las leyes del movimiento uniformemente acelerado al lanzamiento de proyectiles.

Galileo constituye la ciencia en ciencia experimental, que trata de dar respuesta a los problemas que se plantean desde la física y trabaja en la Academia como institución abierta al debate y la polémica, que encauza los deseos de progreso intelectual y de renovación que surgen del propio medio social. El razonamiento científico se basa en experiencias sensatas y razonables, en las pruebas y demostraciones necesarias. Por el experimento los científicos tienden a obtener proposiciones verdaderas acerca del mundo. La investigación científica se entiende como un conjunto de procesos cognoscitivos, que se articulan por medio de varias investigaciones particulares exactamente determinadas. La ciencia elabora teorías que se representan mediante las matemáticas y se sistematizan a través de la experimentación (Torrini, 2000).

La ciencia en el Renacimiento es conocimiento público por razón de su método; la reglamentación metodológica se controla públicamente y reclama nuevas instituciones científicas. Entre ellas, las academias desempeñan un papel excepcional en el paso intelectual de la Edad Media a la Edad Moderna y a la aparición de las modernas instituciones científicas. La Academia renacentista se enmarca en un momento cultural potente e innovador, que enfrenta el neoplatonismo con el aristotelismo de corte medieval, que se solventa con el triunfo absoluto del primero. En particular, las corrientes académicas actualizan el programa pitagórico, sostenido por la recuperación de las corrientes neoplatónicas. La cuantificación de las cualidades objetivas y la correspondiente modelización de fenómenos proporcionan las bases teóricas que, junto con la invención de nuevos instrumentos de medida, cada vez más precisos y especializados, sustentan el desarrollo de las técnicas experimentales. Este programa puede realizarse por sus componentes matemáticas. Las bases matemáticas de la época moderna están en el Renacimiento, donde se establecen nuevos y potentes sistemas de

representación junto con la delimitación de los problemas, que dan lugar al descubrimiento y estudio de relaciones funcionales.

Esta época promueve un nuevo tipo de sabio, establece el germen del futuro científico experimental moderno, disciplinarmente especializado, que actúa fuera de las viejas instituciones, como las universidades y los conventos, impulsado por su curiosidad y su amor por las ideas. El nuevo saber integra teoría y práctica; la fusión entre técnica y saber constituye el germen de la ciencia moderna, que surge en estos años. El diseño y el uso de nuevos instrumentos, cada vez más exactos, impulsa un mayor rigor en los experimentos que demandan nuevos y complejos tratamientos matemáticos. Pero es la dimensión ética del conocimiento científico la que se consolida con la tenacidad de Galileo por defender su validez propia y su independencia de los criterios religiosos y de autoridad.

La tarea educativa y política de la Academia renacentista alcanza un importante grado de desarrollo y una autoridad moral indiscutibles, pero no se concreta en ninguna actividad institucionalizada. Habrá que esperar a la culminación del racionalismo en la época de la Ilustración para encontrar un programa sistemático de formación sostenido por los principios de la ciencia moderna.

La Academia en la Ilustración

En 1700 el gran elector de Brandemburgo, Federico I de Prusia, aprueba la creación del *Observatorio y de la Sociedad de Ciencias de Berlín*, institución conocida como *Academia de Berlín*. Leibniz redacta sus estatutos y pasa a ser su primer presidente. En sus recomendaciones previas, Leibniz insiste en que la Sociedad se esfuerce por combinar la teoría con la práctica, en beneficio no sólo de las artes y de las ciencias, sino también del país y de sus habitantes, promoviendo el comercio, la manufactura y la industria. Esta Academia deberá ocuparse sobre todo de las verdaderas ciencias: la matemática y la física.

La *Academia de Berlín* se encuadra en el contexto de las academias ilustradas europeas, que realizan una alta función investigadora. La organización de la ciencia fue reestructurada en todos sus aspectos por las academias y sociedades científicas que surgen a mediados del siglo XVII y que se expanden en el XVIII, periodo que representa una etapa esencial en el desarrollo y nueva organización de la ciencia, con una componente internacional

Las academias constituyen órganos oficiales de coordinación y producción de conocimientos, dando cauce a una obra ya iniciada durante la revolución científica en décadas anteriores. Las autoridades políticas perciben la necesidad de superar las iniciativas particulares y privadas y apoyan y promueven nuevas instituciones, aportando financiación para facilitar el encuentro regular de hombres que comparten un interés común por la ciencia y para sostener sus actividades. Las primeras publicaciones periódicas de contenido científico surgen como actas de estas reuniones en las academias. Esas publicaciones sirven en cada caso para la comunicación de nuevos descubrimientos a instituciones similares y su posterior discusión. En la misma época en que el patronazgo político se transforma en apoyo regular mediante academias reales, las redes informales de comunicación entre científicos fueron reemplazadas por las primeras revistas científicas. Las academias reclutan sus miembros entre las personalidades más relevantes de la cultura, sin considerar su nacionalidad; igualmente los científicos se esfuerzan por pertenecer al mayor número de academias posible. También convocan premios y concursos sobre temas específicos y mantienen debates que influyen en el curso de nuevas investigaciones (Restivo, 1992).

Las academias de la Ilustración son instituciones diferentes de las academias renacentistas, principalmente por su sólida organización y su carácter oficial, y están vinculadas con el fortalecimiento de los estados modernos. La *Royal Society* la funda Carlos II de Inglaterra en 1660, y a ella pertenecieron Locke y Newton, quien llegó a ser su presidente. La *Royal Society* edita las *Philosophical Transactions*. En 1666 Luis XIV, a propuesta del ministro Colbert, funda en Francia la *Académie Royale des Sciences*, reconociendo la actividad llevada a cabo por Desargues, Descartes, Gassendi, Mersenne y Pascal, entre otros, desde 1630. Los modelos de estas dos instituciones son diferentes ya que, en el primer caso, se trata de una asociación de científicos y personas interesadas, autofinanciado y con cierta ayuda gubernamental; en el segundo caso, la constituyen un grupo selecto de científicos retribuidos por el rey y con patrocinio del gobierno. Estas dos instituciones están bien estudiadas y su considerable actividad está descrita en múltiples publicaciones (Merton, 1984; McClellan, 1985). A comienzos del siglo XVIII los monarcas ilustrados fundan academias en Berlín, San Petersburgo, Viena y otras ciudades europeas, de las que se contabilizan casi un centenar a lo largo del siglo y para lo cual cuentan con pensadores destacados (Grattan-Guinness, 1994).

En España, desaparecida la *Academia Matemática*, el cultivo de la ciencia corresponde a lo largo del siglo XVII a otras instituciones como los Colegios Imperiales o los Institutos Militares, con orientación diferente a las Academias Ilustradas. La *Real Academia de Ciencias Naturales y Artes* de Barcelona es la única institución académica oficial española no profesional de este periodo, reconocida en 1770 por Carlos III. Las Sociedades Económicas de Amigos del País, agrupaciones de particulares que proliferan durante el siglo XVIII, conforman una red que difunde ideas ilustradas y conocimientos científicos. Las quejas de Feijoo (1781) sobre el atraso científico español denuncian la pasividad de los poderes públicos en este campo.

Entre 1660 y 1850 las academias y sociedades son los principales centros de actividad científica organizada y autónoma, que favorecen y legitiman los intereses de grupos sociales dominantes. Las academias se transforman en instrumentos de progreso económico, de control social, de apoyo para la gestión de recursos y para el fomento de la cultura en todas las direcciones del conocimiento. Si bien las sociedades científicas no son instituciones pedagógicas y de enseñanza ya que no se dedican a transmitir de manera sistemática conocimientos a los jóvenes y no conceden títulos, sí contribuyen a la educación. Su actividad educativa está orientada hacia las elites y sus prioridades se dirigen hacia el progreso en el conocimiento de la naturaleza, la aplicación de las ciencias a todos los dominios de la cultura y hacia el gobierno del pensamiento por medio de la comunidad de investigadores. Hay que esperar a 1850 para que el liderazgo en la investigación se desplace a las universidades, especialmente en Alemania y en los Estados Unidos de América, e incremente su vinculación con la enseñanza.

A mediados del siglo XVII se dan condiciones para las modernas academias, ya que se dispone de un conocimiento suficiente sobre la naturaleza con validez universal. Estas instituciones garantizan el progreso continuo de la ciencia por estar basadas en el método experimental y en las proposiciones de la matemática; igualmente aplican sus resultados a las necesidades de la técnica. Fue la concurrencia de muchos investigadores interesados por los mismos objetivos lo que impulsó la creación de estas organizaciones con forma jurídica reglamentada y amplia base organizativa para llevar a cabo trabajos compartidos. Los deseos de comunicación fluida y regular, el reconocimiento de la prioridad en los descubrimientos, la publicación y edición de documentos y el desarrollo de la comunidad son algunas de las razones que impulsan la necesidad de institucionalizar el trabajo científico. Por ello, las academias se organizan como dependencias estatales. La modernidad se caracteriza por el apoyo que prestan las

monarquías ilustradas a científicos e investigadores y por la consideración del conocimiento como capital público. La ambición de poder de los nuevos estados lleva a impulsar todos los intereses económicos, intelectuales y morales de sus súbditos. Las academias son instituciones adecuadas para dar cauce eficiente a la alianza entre ciencia moderna y estado moderno.

La *Academia de Berlín* ejemplifica esta época en la historia de las academias ya que muestra apropiadamente la relación entre el conocimiento científico y el estado moderno; Leibniz, su primer director, aporta la visión universal de la cultura académica, de sus relaciones con la filosofía, la ciencia y con la actividad política (Aiton, 1992).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nace en Leipzig. Reside en París y visita Londres, donde tiene conocimiento directo de las academias francesa e inglesa y se relaciona con los personajes relevantes del mundo cultural y científico europeo. Contribuye a la fundación de las academias de Berlín, Viena y San Petersburgo y participa en muchas otras. Desde los comienzos de la edición de las *Acta Eruditorum*, en 1682, concibe la ciencia como campo de trabajo de un número reducido de sabios y eruditos. Aspira a crear una ciencia universal que recapitule en sí misma las diversas disciplinas y a configurar una organización cultural y política de carácter universal. Leibniz trabaja en matemáticas y en 1666 publica el *Ars Combinatoria* y la *Disputatio Aritmética de Complexionibus*. En 1684 publica en las *Acta Eruditorum* una exposición clara y precisa de los principios de su cálculo diferencial. Destaca como historiador y filólogo, como matemático, físico, jurista y filósofo. Orienta su trabajo a promover la recuperación cultural, religiosa y política del pueblo alemán.

Como filósofo, Leibniz integra el idealismo griego de Platón y Aristóteles con el cristianismo reformado y la nueva ciencia de la época, basada en el conocimiento natural y en las matemáticas. Abarca todas las ciencias y las hace progresar. Se le reconocen la invención del cálculo diferencial, independientemente de Newton, el establecimiento del principio de conservación de la energía, y la teorización del juego de las representaciones por debajo de las operaciones conscientes que da lugar a la moderna ciencia psicológica; también se le reconocen, como a Galileo, sus esfuerzos por conciliar el conocimiento mecánico de la naturaleza con el cristianismo. Pero Leibniz destaca como modelo de racionalismo.

Leibniz postula un universo homogéneo en todas sus partes, ligadas por un conjunto de leyes que lo rigen todo, que se mantienen en íntima coherencia por un sentido que las armoniza. El sentido del universo consiste en la realización de todos los grados de la fuerza, de la vida, de la perfección y de la felicidad. El universo manifiesta la perfección infinita de Dios. Las verdades necesarias de la matemática y de la lógica se limitan a encerrar las condiciones a que está sujeto el orden de todo mundo posible, pero el mundo se compone de hechos que no cabe derivar de tales verdades. Leibniz postula la fraternidad de todas las cosas en un sentido común del universo. Concibe que la ilustración de la conciencia por la ciencia hará más feliz y mejor al género humano.

Leibniz no busca unos resultados determinados, busca instrumentos que sean fecundos; uno de estos instrumentos es el lenguaje simbólico-filosófico universal. También busca principios universales del conocimiento, como los de continuidad y conservación de la energía. La Academia es uno de los instrumentos para fomentar la cultura en todas las direcciones. Los planes de Leibniz surgen de su comprensión de los problemas de la cultura humana y, todos ellos, llegan a realizarse de algún modo desde la *Academia de Berlín*. Las propuestas para su fundación apuntan hacia una sociedad encargada de dirigir la cultura completa del pueblo alemán, de acuerdo con los principios científicos, una relación práctica de la ciencia con la industria y el comercio,

un archivo de todos los conocimientos existentes, una enciclopedia del saber (Reale y Antiseri, 1988b).

El programa filosófico y científico de la Academia de Berlín se sostiene en el racionalismo y otras ideas ilustradas y se apoya en el desarrollo científico de la época, pero son los conceptos y teorías debidos a Leibniz los que encuadran su perfil filosófico y científico. El racionalismo de Leibniz es continuador de Descartes, al que critica e intenta superar; rechaza la visión mecanicista del mundo cartesiano y la consideración de los cuerpos vivientes como máquinas. Las leyes elaboradas por la mecánica no son verdades matemáticas, dotadas de un carácter lógico irrefutable. Son leyes de conveniencia, basadas en la mejor opción para describir la creación del mundo.

Leibniz reconduce el campo de la lógica al examen de la estructura formal de la verdad. Critica las reglas cartesianas como preceptos psicológicos que no ofrecen garantía. También considera que la lógica aristotélica es un formalismo insuficiente. La lógica formal debe descomponer las nociones racionales en sus últimos elementos y reducir todas las proposiciones a dos principios fundamentales: identidad y no contradicción. Concede una importancia muy especial al empleo de símbolos apropiados, útiles para fijar de forma inequívoca los últimos elementos de los conceptos. Una vez expresadas las argumentaciones mediante símbolos, su verificación se convertirá en un cálculo algebraico que se podrá ejecutar con rigor. Su admiración por la matemática le lleva a proponer una reforma profunda, reelaborándola mediante los cálculos de la lógica, adelantando el programa logicista casi 200 años.

Aborda el problema del método y le da un giro importante. Amplía la lógica aristotélica del silogismo, la generaliza y le incorpora los procedimientos matemáticos. Inicia una lógica que contempla todas las relaciones generales y les subordina las del número y del espacio. La categoría de relación se extiende hasta ocupar el lugar que ocupa en la ciencia moderna, superando la limitación que tienen las relaciones entre magnitudes. Sobre la base de esta lógica universal constituye su combinatoria, en la que sostiene su plan de lenguaje simbólico universal. Leibniz llama caracteres a ciertas cosas con las que se expresan las relaciones mutuas de otras y cuyo manejo es más fácil que el de estas últimas. El sentido de modernidad de esta noción de representación se expresa explícitamente:

“Advierto que ni conozco ni encuentro ni pruebo verdad alguna sin servirme interiormente de palabras o de otros signos. Aún mas, sin caracteres, nada pensaríamos nunca con distinción, ni razonaríamos. (...) Cuando vemos figuras geométricas (...) a esas figuras hay que considerarlas también como caracteres” (Escritos de Leibniz, Vol. II, p. 141).

Delimitados los conceptos simples y expresados en caracteres propios, puede representarse la totalidad de los conceptos por medio de los signos. En este lenguaje universal las combinaciones de los signos responden exactamente a las relaciones objetivas. Con este lenguaje se supera la imprecisión y arbitrariedad de la terminología filosófica (Reale y Antiseri, 1988b).

Combinatoria, característica, ciencia, matemática universal, cálculo lógico: en todas estas nociones se busca aplicar la lógica general a la matemática. El programa matemático de Leibniz, que se transmite y trabaja en las academias, es amplio y ambicioso. Se ocupa de ordenar y simbolizar formas y relaciones dentro de las diversas clases de objetos; las relaciones de igualdad y desigualdad, de todo y parte y de función. Las representaciones que introduce sirven para hacer operativos los conceptos ya que se pueden manipular mediante algoritmos, procesar por medio de reglas y permiten derivar nuevas relaciones. Mediante las representaciones se profundiza en la estructura

conceptual de las nuevas nociones. En su invención del análisis matemático concede gran importancia al arte de expresar los conceptos mediante notaciones adecuadas y al arte de su empleo. Introduce, con su cálculo, símbolos apropiados para representar las magnitudes infinitesimales, posibilidad no contemplada por Viète y Descartes. Estos símbolos no tienen ya nada de aritmética, pero obedecen a algoritmos formales.

“Todos los teoremas no son más que taquigrafías o compendios del pensar, con objeto de ahorrarle al ánimo el tener que pensar distintamente las cosas mismas y que, no por ello, deje de desenvolverse todo correctamente. En ello consiste toda la utilidad de las palabras y de los caracteres” (Escritos de Leibniz, Vol. II, p. 132).

Con el cálculo infinitesimal la matemática somete el movimiento al cálculo, en esta época donde la reducción a movimientos es el medio para comprender y dominar los procesos de la naturaleza. La principal contribución de Leibniz es el planteamiento formal que aportó al cálculo; a él debemos la determinación del concepto de función y los conceptos y notaciones para la diferencial, la derivada y la integral, o fórmulas para la derivada enésima. La invención de nuevos sistemas de representación y su posterior desarrollo son aportes esenciales para las nuevas nociones y teorías. Con esto Leibniz provee herramientas sólidas para la construcción de las grandes estructuras conceptuales del Análisis Matemático. A ello también contribuyen con sus trabajos, académicos de muy diversos países, suizos, franceses e ingleses principalmente. En este contexto el trabajo de Leibniz fue una aportación esencial, si bien dio lugar a duras polémicas como la que inició contra él la *Royal Society* en 1713, acusándole plagiar la obra de Newton y negando su aportación a la invención del cálculo infinitesimal (Kline, 1992).

Leibniz dio la máxima importancia al estudio de las pequeñas diferencias existentes entre unos seres y otros. Este interés le llevó a estudiar el principio de continuidad y a idear el análisis diferencial. El mismo interés le llevó a enunciar el principio de identidad de los indiscernibles, que está en la base de su metafísica. El principio establece que si hay dos entes tiene que haber alguna pequeña diferencia entre ambos, por pequeña que sea. Leibniz lo deriva del principio de razón suficiente.

Cuando Leibniz introduce los símbolos para la diferencial y la integral, respectivamente, explora cuidadosamente las reglas a que obedecen cuando se utilizan en fórmulas y las aplica para traducir diversos argumentos que se encuentran en el estudio de las tangentes y de las cuadraturas de las curvas. Grattan-Guinness (1984) considera esenciales tres ideas en la invención del cálculo por Leibniz. En primer término la preocupación permanente por la característica universal, que dirige su interés por los métodos, por la estructura, más que por los resultados y las aplicaciones. En este caso, Leibniz buscaba un cálculo para tratar los problemas geométricos infinitesimales. En segundo lugar, la conclusión de que las determinaciones de cuadraturas y de tangentes son operaciones inversas, inferencia extraída de su estudio sobre las sucesiones de diferencias. La tercera idea fue la utilización sistemática del triángulo característico en las transformaciones de cuadraturas, artificio con el que Leibniz hace descubrimientos significativos, entre ellos el desarrollo en serie de π . Está documentado que en 1675 ya había establecido los puntos fundamentales del cálculo infinitesimal. Estos nuevos conceptos y los cálculos asociados formaron parte relevante del programa matemático que Leibniz desarrolla a lo largo de los años en la Academia de Berlín y en sus contribuciones a otras academias.

Son muchos los científicos y filósofos que se vinculan con Leibniz, quien dejó una huella profunda en la historia del pensamiento y de la matemática por sus aportaciones conceptuales. Entre los continuadores de la matemática de Leibniz están

los hermanos Bernouilli y su escuela, quienes desarrollan el cálculo infinitesimal, aplicando su algoritmo y su teoría. (Grattan-Guinness, 1994).

Tras el fallecimiento de Leibniz la *Academia de Berlín* mantuvo una actividad regular pero sin grandes aportaciones. Hay que esperar a 1740 con la subida al trono de Federico el Grande, para que se produzca la revitalización de la institución. El nuevo monarca se rodea de pensadores franceses e impulsa la cultura francesa; transforma la *Academia de Berlín* en una *Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, a cuyo frente puso al científico Maupertuis y, posteriormente, a D'Alambert.

La *Academia de Berlín* constituye para Federico el Grande un instrumento prioritario en sus planes culturales; con esta refundación se propone impulsar y difundir los valores de la Ilustración en sus dominios. La influencia francesa en la Academia de esta segunda época fue abrumadora. La Ilustración francesa del siglo XVIII se caracteriza por considerar que la inteligencia es soberana frente a la vida y, por ello, la erige en juez de las instituciones sociales, de la economía, la iglesia y las costumbres. Humanidad, progreso, solidaridad de intereses son grandes ideas que llenan la época ilustrada. Los hombres que la protagonizan son independientes, razonadores, vivos y dinámicos. La humanidad avanza gracias al poder de la Razón y progresa desde la barbarie hasta la tolerancia y la moral independiente. En 1746 se redactan los nuevos estatutos para la *Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*. En estos años se consigue elevar el nivel y se produce la culminación del programa matemático iniciado por Leibniz.

Leonard Euler (1707-1783) nace en Basilea, y es el principal continuador del programa matemático de la *Academia de Berlín*. Durante 25 años Euler, dedica toda su energía al desarrollo formal de los métodos de cálculo de Leibniz y Newton.

Entre 1741 y 1766 Euler da forma al Análisis y lo convierte en una rama coherente de las matemáticas. Pasa de los métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas a establecer que la unidad básica de estudio son las expresiones analíticas, en especial las funciones:

“Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta comoquiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes”
(Introducción al Análisis de los Infinitos, Cp. I. 4).

La tarea de fundamentar el Análisis Matemático la lleva a cabo Euler, esencialmente, con la publicación de tres obras: *Introducción al Análisis de los Infinitésimos*, publicada en 1748, *Textos sobre el Cálculo Diferencial*, editada en 1755, y la obra en tres volúmenes *Textos sobre el Cálculo Integral*, publicados entre 1768 y 1770, una vez vuelto a San Petersburgo, pero como producto de su etapa en Berlín. En la primera de ellas hace un inventario y clasifica todo el campo de expresiones que se ajustan a la definición de función, introduciendo tanto análisis como puede sin usar ni la diferenciación ni la integración. Esta obra aporta el currículum básico sobre el que se ha sostenido la enseñanza del Análisis durante más de dos siglos y medio. En la obra *Textos sobre el Cálculo Diferencial* vuelve a utilizar la idea de Leibniz de las diferencias infinitamente pequeñas, que pueden tener entre sí razones finitas. En esta obra estudia y sistematiza la diferenciación de funciones de una o varias variables, las ecuaciones diferenciales y las derivadas de orden superior. En la tercera obra se lleva a cabo una discusión casi completa de la integración de las funciones algebraicas y de las trascendentes elementales, proporcionando nuevos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, que han servido de iniciación a la teoría de la integración desde entonces. No fueron estas las únicas obras de Euler sobre Análisis Matemático, pero sí las que mostraron su concepción estructural de las matemáticas, en las que destaca su interés

por presentar este nuevo campo de manera segura, coherente, sistemática y didáctica. Gracias a estos esfuerzos los matemáticos pudieron emprender la revisión crítica de los fundamentos de las nuevas teorías y asumir las críticas de Berkeley (Dunham, 2000).

Este era el ambiente de la *Academia de Berlín* en la segunda mitad del siglo XVIII. En ella se cultivan los valores del racionalismo que son valores de los filósofos europeos continentales de la época, principalmente franceses, aunque con aportaciones relevantes de la filosofía alemana. Los fundamentos epistémicos del trabajo en la Academia están en el racionalismo, que proporciona un marco teórico sobre el conocimiento diversificado y maduro (Dilthey, 1978).

En la *Academia de Berlín* se combinan la filosofía con la gran ciencia físico matemática. Se desarrolla la crítica de Leibniz hacia el mundo exterior y se prepara en parte la obra de Kant, funcionario igualmente del Estado prusiano. La sección matemática se esfuerza por extender el campo de lo mensurable a los hechos sociales.

Para Federico II el interés del género humano está en el imperio de la razón y en su progreso; la función del trabajo científico la concibe sólo en conexión directa con otros valores de la cultura. Al promover una política científica, el Estado prusiano representa valores que trascienden ampliamente su propia existencia y están al servicio de metas superiores de la sociedad. Impulsar el progreso de la razón es el fin principal de la Academia en esta época, por encima incluso de su vinculación con la utilidad pública. La Academia congrega a los funcionarios eclesiásticos más importantes, los pedagogos y los escritores de la época de la Ilustración. La Academia no se concibe como un lujo sino como un instrumento para la instrucción de los jóvenes de la nobleza, por ello sus trabajos deben ser asequibles y se redactan en francés, que pasa a ser la lengua oficial. Las ideas centrales del sistema educativo prusiano se desarrollan en algunos trabajos escritos para la Academia por el rey y por su ministro Zedlitz. El Estado es responsable de la educación y la pedagogía se sostiene en la cultura. La razón reafirma su autoridad frente a la reacción. Las naciones logran excelencia cultivando las ciencias y las artes; los ciudadanos deben disfrutar de la mayor cultura e instrucción posibles para que cada una de sus clases proporcione al Estado el mayor número de súbditos útiles y capacitados para el desempeño de sus tareas. Federico II apuesta por instruir a toda la población y rechaza las dificultades e inconvenientes que se derivan del principio de instrucción universal; pero su obra educativa se centra en la nobleza. El fin de la educación es la alegría de obrar cumpliendo con los deberes para con la sociedad.

La Academia es durante la Ilustración un instrumento para la creación, crítica, transmisión y difusión del conocimiento científico totalmente adaptado a las ideas de la época. Encontramos en el racionalismo una teoría del conocimiento, más compleja que la de etapas anteriores; un programa matemático ambicioso que conjuga la profundidad de ideas con la invención de nuevos sistemas de representación vinculados con algoritmos potentes, que dan lugar a la construcción de nuevas estructuras conceptuales. También apreciamos la preocupación política de los líderes académicos, la presencia de nuevas ideas educativas y su expresión concreta en organizaciones sociales. En la institución académica berlinesa se da cauce a la obra iniciada en décadas anteriores. Se trata de un órgano estatal para la coordinación y producción científica, que adquiere protagonismo por la fecundidad de sus ideas y la utilidad social de sus trabajos. Las autoridades políticas superan las iniciativas privadas y lideran el trabajo de la nueva institución.

Transformaciones y cambios

El modelo organizativo promovido por Leibniz prevalece en Europa hasta comienzos del siglo XIX; los matemáticos de orientación leibniziana también dominan los contenidos de las matemáticas europeas hasta esas fechas. Un peligro del sistema de academias nacionales del siglo XVIII radica en que su control lo tiene un grupo de personas relativamente pequeño, que puede perder su impulso intelectual. Resulta posible incluso que la dirección de estas instituciones pueda estar en manos de intelectuales mediocres con el consiguiente deterioro, cosa que ocurre a la muerte de Leibniz en la *Academia de Berlín*. Otro peligro radica en que las academias se contaminen con ideas nacionalistas y excluyan investigadores e ideas procedentes de otros países, como llega a ocurrir en la *Royal Society* en el siglo XVIII.

A comienzos del siglo XIX el mundo intelectual está dominado por la *Academia Francesa*, que proporciona estabilidad social y económica a sus miembros directivos y una gran publicidad a sus logros científicos. Sin embargo, ocurren una serie de hechos que marcan el declive de la institución y el paso del liderazgo científico a las universidades. La desconsideración hacia los descubrimientos del matemático noruego Abel sobre la imposibilidad de resolver las ecuaciones de quinto grado mediante fórmulas y la pérdida de su trabajo sobre las funciones trascendentes, llevan al gobierno noruego a presentar una protesta formal ante la *Academia Francesa*. El rechazo de los trabajos de Galois sobre la teoría de grupos y la resolución general de ecuaciones son otra muestra de la pérdida de interés de esta Academia por difundir las innovaciones y descubrimientos de autores distantes a sus minorías dirigentes. Los casos de Abel y Galois reflejan que la estructura de las academias a comienzos del siglo XIX está controlada por una elite reducida con un poder extraordinario. Restivo (1992) sostiene que el declive de las academias fue acelerado por el egoísmo en su gestión derivado de la ambición de sus líderes, que llevó a abusos en la política de publicaciones y, en ocasiones, a apropiaciones indebidas de los trabajos de otros. La vinculación a las universidades de los nuevos investigadores matemáticos, especialmente en Alemania, junto con la pérdida de su impulso científico contribuyen al deterioro de la institución académica desde el inicio del XIX y provocan la desaparición de su papel predominante en el desarrollo de la ciencia. Sea cual sea la causa, el modelo de las academias del periodo ilustrado se encuentra agotado a comienzos de la Edad Contemporánea.

Alrededor de 1850, la enseñanza y la investigación se introducen en las universidades, inicialmente en Alemania y Estados Unidos; se crean laboratorios y se constituye un cuerpo de profesores comprometidos, simultáneamente, con la docencia y la investigación. Durante el siglo XIX la ciencia tiene un crecimiento excepcional en Alemania debido a su ubicación en una organización universitaria eficaz, equipada racionalmente y descentralizada, con presupuestos adecuados, apoyo de la industria, publicaciones rigurosas y flujo constante de estudiantes valiosos. Los Institutos alemanes dedicados a la investigación atraen a la elite de los investigadores de los países europeos y americanos; la ciencia alemana muestra su superioridad en los campos que interrelacionan la teoría y la aplicación industrial y así marca su progreso durante estos años. También a finales del siglo XIX se produce en el Reino Unido una mejora de los centros de enseñanza superior y de los institutos de investigación. Al mismo tiempo las academias se mantienen como instituciones honoríficas, que han perdido la iniciativa para dirigir y coordinar la actividad científica. En 1847 se crea en España, por Real Decreto, la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

El incremento de la investigación industrial y gubernamental es un indicador de los cambios que comienzan en el siglo XIX y se aceleran en el XX. A finales del XIX prácticamente desaparecen los científicos individuales con medios independientes y que prestan servicios privados. Las universidades asumen entre sus funciones la

investigación y dan acogida y apoyo a un número cada vez mayor de investigadores (Cid, 1982; Grattan-Guinness, 1994).

El Círculo de Viena

El periodo que se inicia alrededor de 1850 contempla el predominio de la universidad en la investigación. Durante estos años aumenta la creación de nuevos conocimientos en la universidad respecto de su transmisión, de manera que se produce un desplazamiento de prioridades desde la docencia hacia la investigación.

A finales del siglo XIX disminuyen, drásticamente, las agrupaciones de pensadores e investigadores libremente vinculados por su interés común en la creación del conocimiento y despreocupados de su aplicación práctica inmediata. Las instituciones académicas que mantienen sus reuniones lo hacen con carácter formal y rutinario. Sin embargo, en la primera mitad del siglo XX surge el *Círculo de Viena*, un grupo que recupera el espíritu ilustrado, comprometido con los principios y valores de la ciencia y cuyo vínculo está fundado en la libre decisión de llevar a cabo un trabajo conjunto de revisión, crítica y creación científica.

Las condiciones excepcionales que se producen en Europa en el periodo comprendido entre las dos guerras mundiales y, en particular, las peculiaridades culturales y sociales de la Viena de estos años, descritas magistralmente por Janick y Toulmin (1998), muestran una sociedad intelectualmente brillante y avanzada, que facilita la consolidación de un grupo sólido de filósofos y científicos y permite recuperar un proyecto académico racionalista actualizado. El *Círculo de Viena* proporciona un espacio donde debatir y buscar respuestas para la crisis intelectual de la época y ayuda a elaborar alguno de sus principales instrumentos conceptuales.

El *Círculo de Viena* comienza su andadura en 1924. En esa fecha Moritz Schlick, quien se había incorporado recientemente a la Cátedra de Filosofía de las Ciencias Inductivas de la Universidad de Viena, es invitado para coordinar un grupo de debate sobre filosofía de la ciencia. Las reuniones del grupo se celebran semanalmente y tienen un precedente anterior a la gran guerra, cuando un grupo de especialistas en ciencia y filosofía comienzan a debatir regularmente. Todos los miembros del Círculo son expertos en alguna disciplina científica, lo cual facilita una cooperación constructiva y establece, desde el comienzo, un nivel de claridad y responsabilidad superior al de un simple encuentro entre filósofos. También están familiarizados con la lógica moderna, lo cual permite representar simbólicamente el análisis de un concepto o proposición sometido a discusión y, por tanto, a precisar los argumentos. Carnap (1992) evoca las reuniones del Círculo en términos amables:

“Era característica del Círculo la actitud abierta y antidogmática adoptada en las discusiones; cada uno de nosotros estaba constantemente dispuesto a someter sus opiniones a un nuevo examen, propio o de los demás. El espíritu común era de cooperación más que de competición. El objetivo común era trabajar juntos en la lucha por la clarificación y el análisis” (Autobiografía intelectual, p. 55).

La corriente de pensamiento de los miembros del *Círculo de Viena* se denomina positivismo lógico. Este grupo recupera las tesis básicas del positivismo y sostiene que las ciencias experimentales son el modelo de conocimiento objetivo, en cuanto constatación de hechos de experiencia y de sus regularidades. Schlick había publicado en 1918 *Teoría General del Conocimiento*, donde se avanzan algunas ideas básicas del Círculo. Sus miembros rechazan toda teoría especulativa sobre la realidad que no se infiera a partir de hechos observados mediante la aplicación estricta de las reglas y principios de razonamiento que constituyen el método de investigación de las ciencias

empíricas. El neopositivismo se caracteriza por los profundos y detallados análisis acerca del lenguaje, por las reflexiones sobre la estructura y métodos de las ciencias experimentales y sobre los fundamentos de las matemáticas, también por su actitud beligerante contra la metafísica y por su exclusión de las cuestiones de valor.

La actividad del Círculo proporciona un impulso determinante a la filosofía y metodología de la ciencia y recupera parte de la tradición académica del siglo XVIII.

El proyecto del *Círculo de Viena* revitaliza los principales objetivos del racionalismo: la búsqueda de un método racional, de una lengua exacta y de una ciencia unificada. En los años previos a 1914, filósofos y científicos austriacos y alemanes siguen con interés las innovaciones matemáticas de Frege y de Hilbert, la física teórica de Poincaré, Lorentz y Einstein, así como el escepticismo de Ostwald, Mach y otros. El *Círculo de Viena* surge de estos precedentes, que coinciden con el auge de la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad. El marco teórico del neopositivismo se sustenta en el empirismo radical de Mach y Avenarius, en la lógica formal y en la matemática formalista, junto con las ideas del *Tractatus* de Wittgenstein. El trabajo y las preocupaciones de este grupo se sostienen en un análisis crítico, que inspira al nuevo positivismo, acompañado por un rechazo del estamento filosófico oficial. Los jóvenes positivistas vieneses realizan una revisión de la filosofía de la ciencia mediante una generalización de métodos ya acreditados por su valor científico. Comparten objetivos con Moore, Russell y la escuela analítica inglesa de Cambridge. La anexión de Austria al III Reich suponen la interrupción abrupta de los trabajos del *Círculo de Viena*, cuya actividad conjunta se considera cancelada en 1938 (Ayer, 1978).

Según el programa del Círculo, la filosofía debe sostenerse sobre la ciencia, integrando la física, la biología e, incluso, la psicología en una ciencia unificada. En la práctica esto implica una revalorización de las ciencias sociales y la opción de reconstruir las ciencias humanas junto con las experimentales en forma de disciplinas empíricas inductivas, formalizadas según los esquemas axiomáticos de los sistemas de la matemática pura, tal y como Frege y Russell habían hecho, y legitimar todas sus generalizaciones mediante observaciones y conceptos abstractos como ocurre con las disciplinas empíricas inductivas.

Son prioridades de los miembros del *Círculo de Viena* la reconstrucción racional del proceso de formación de los conceptos científicos mediante fundamentos lógicos, la búsqueda del significado del lenguaje a través de su análisis lógico, la exigencia de verificación de los enunciados científicos y de un criterio con sentido empírico, el rechazo de la metafísica por su carencia de significado y la superación de la distinción entre humanidades y ciencias de la naturaleza (Honderich, 2001).

Las aportaciones de los neopositivistas en el análisis de las ciencias empíricas son considerables. Conceptos como los de causalidad, inducción, términos teóricos y observacionales, probabilidad, leyes científicas y muchos otros de la epistemología fueron revisados y actualizados. También realizan aportaciones a los fundamentos de la lógica y de la matemática, como ocurre con las contribuciones de Gödel. Consolidan la filosofía de la ciencia como disciplina autónoma, al explicitar de manera sistemática el método y las condiciones de validez del conocimiento científico. La actitud frente a la metafísica es una constante en el neopositivismo, ya que la metafísica acepta como significativos términos que no implican referencia a la experiencia y construyen frases que pretenden referirse a la realidad sin lograrlo.

Las relaciones del *Círculo de Viena* con la matemática de su época son intensas y fructíferas. A finales del siglo XIX el programa para dotar de rigor conceptual al cálculo infinitesimal se alcanza con la aritmetización del Análisis, que llevan a cabo

Weierstrass y su escuela cuando consiguen reducir los conceptos fundamentales del Análisis Matemático a los conceptos aritméticos. Esta reducción de la matemática a la aritmética alcanza su momento culminante con la obra de Peano, quien propone en 1899 una axiomática para la aritmética, y desarrolla un simbolismo con el que anotar y también fundamentar los modos de inferencia.

Gotlob Frege trabaja para fundamentar la aritmética sobre una base más profunda, reduciendo el concepto de número natural al concepto lógico de clase.

“Espero haber hecho verosímil en esta obra la idea de que las leyes aritméticas son juicios analíticos y que, por consiguiente, son a priori. La aritmética, por tanto, sería solamente una lógica más extensamente desarrollada, y cada enunciado aritmético sería una ley lógica, aunque una ley derivada” (Fundamentos de la Aritmética. Conclusión, p. 111).

Bertrand Russell critica la obra de Frege, basada en la lógica de clases, mediante el descubrimiento de antinomias en el sistema propuesto, que surgen de la aceptación de conjuntos extraordinarios, y que trata de solventar mediante la lógica de tipos. En *Nuestro conocimiento del mundo exterior* Russell aplica el método del análisis lógico a las ciencias empíricas. Plantea así el programa fenomenista de reconstrucción del aparato conceptual de la física a partir de los datos sensibles y el instrumental de la lógica (Russell, 1973c; Mosterín, 2000).

Frege, Peano y Russell son básicamente, platónicos. Aceptan la existencia de entes y relaciones que el matemático debe descubrir pero no inventar. Por el contrario, David Hilbert junto con la escuela formalista sostiene que un ente matemático existe cuando se le ha definido de un modo no contradictorio. La demostración de la no contradicción de las teorías matemáticas es un problema central de investigación para estas teorías matemáticas. Un procedimiento de encontrar la no contradicción consiste en hallar un modelo de la teoría dentro de otra teoría ya aceptada como coherente. Esta vía, sin embargo, no ataca de raíz el problema planteado (Körner, 1984).

Hilbert plantea un programa encaminado a proporcionar una prueba directa y absoluta de un sistema axiomático. De este modo se propone superar el descubrimiento de las antinomias, la crisis del intuicionismo, las dificultades detectadas en el trabajo de los logicistas, las distintas concepciones sobre la naturaleza de los entes matemáticos y las pruebas indirectas sobre la no contradicción de un sistema axiomático. El programa formalista de Hilbert, continuador de Leibniz, requiere la formalización completa de la matemática clásica. Los conceptos se reemplazan por signos, sus ideas por secuencias de signos, el razonamiento por la manipulación combinatoria de las hileras de signos y la demostración por la deducción formal de acuerdo con las reglas.

“La idea básica de mi teoría de la demostración es la siguiente: todo lo que hasta ahora ha formado parte de las matemáticas es objeto en ella de una demostración rigurosa. De este modo las matemáticas reales, es decir las matemáticas en un sentido estricto, se convierten en un conjunto de fórmulas. (...) En lugar de la inferencia concreta, lo que tenemos en la teoría de la demostración es un procedimiento puramente externo, de acuerdo con reglas, a saber: la utilización del esquema de inferencia y la sustitución. Decimos que una fórmula es demostrable cuando o bien es un axioma o es la fórmula final de una demostración” (La fundamentación de la teoría elemental de números, p. 128).

En 1928 Hilbert plantea el problema de la completitud de la teoría de números preguntando si los axiomas de Peano, que pertenecen a la teoría elemental de números, permiten demostrar o refutar todas las proposiciones de esa teoría. En 1931, Gödel demuestra que no es posible construir una teoría axiomática de los números que sea

completa en el sentido propuesto por Hilbert, ya que siempre existen teoremas de la teoría a los que no corresponde ningún teorema formal de la teoría formal; Gödel muestra que hay teoremas indecidibles ya que ni ellos ni su negación son deducibles en el sistema formal, y proporciona un método para construir tales enunciados. Esta incompletitud carece de solución ya que, al añadir nuevos axiomas, los sistemas formales siguen siendo incompletos. En segundo lugar, Gödel demuestra que no es posible probar la consistencia de un sistema formal de la matemática clásica, incluso añadiendo los recursos y razonamientos del sistema; es decir, es imposible demostrar la consistencia de un sistema formal a partir de sí mismo. La consistencia de la aritmética no se puede obtener utilizando los instrumentos pertenecientes al sistema formal mediante el que se expresa la propia aritmética; queda así decretado el cierre del programa hilbertiano fuerte. La garantía de coherencia de los sistemas formales o de sus cálculos se buscará a partir de aquí en las interpretaciones que sean modelos de dichos cálculos. Consta que Gödel presentó sus resultados en las reuniones del *Círculo de Viena* y que trabajó sobre ellos con algunos de sus miembros.

Las ideas de Hilbert se aprecian en la obra de Schlick: la concepción del significado como dado por las reglas del lenguaje para el uso de un signo; la concepción de que el conocimiento se caracteriza por la simbolización y que, por eso mismo, se diferencia de la simple experiencia.

“Todo conocimiento es una expresión, una representación. Es decir, expresa la situación de hecho que es conocida en ella. (...) Todo conocimiento lo es sólo por virtud de su forma. Es a través de su forma como representa las situaciones conocidas. Sólo ella es importante para el conocimiento. (...) Es cognoscible todo lo que pueda ser expresado, y ésta es toda la materia acerca de la cual pueden hacerse preguntas con sentido” (El viraje de la filosofía, p. 61).

Los neopositivistas se propusieron introducir conceptos mediante definiciones implícitas, es decir, mediante postulados. También sostuvieron la posibilidad de reducir todos los conceptos científicos a su base empírica y fenomenalista, es decir, a lo que constituyen las experiencias empíricas elementales.

La influencia del *Tractatus Logico Philosophicus* en el *Círculo de Viena* es reconocida por sus propios miembros (Carnap, 1992). Aunque no es correcto afirmar que la filosofía del *Círculo* es sólo la filosofía de Wittgenstein, sus miembros reconocen el aprendizaje realizado en las discusiones sobre el *Tractatus*. Se suele subrayar que esta obra proporcionó buena parte de la estructura lógica básica del neopositivismo. También hay cuestiones en las que los miembros del *Círculo* disienten del *Tractatus*, como cuando se afirma en éste que algunas cosas se muestran pero no pueden decirse (Carnap, 1992).

Para Schlick el significado de una proposición es el método de su verificación. La verificabilidad es cuestión de principio más que cuestión de hecho en el positivismo lógico. El criterio de verdad o falsedad de una proposición consiste en que, bajo determinadas condiciones, algunos acontecimientos se produzcan o no. Fuera de las expresiones lógicas y matemáticas, que son variantes tautológicas, no se dan fuentes de conocimiento que no procedan de la experiencia. El principio de verificación se vio sometido a críticas muy duras; muchos lo consideraron como un principio metafísico que, en nombre de la ciencia, condenaba a priori el sentido de cualquier otro discurso.

Las dificultades encontradas en el desarrollo de las tesis neopositivistas se formulan con toda claridad, pero la irrupción del nazismo interrumpe la evolución de los trabajos del *Círculo de Viena*, cercenando la participación más intensa y regular en los debates de dos figuras relevantes: Wittgenstein y Popper. Algunos de los miembros

del Círculo se exilian en Estados Unidos donde conectan con las corrientes empíricas y pragmáticas de la filosofía norteamericana; así el neopositivismo se orienta hacia una corriente semántico-pragmática, denominada liberalización del empirismo.

Wittgenstein se reubica en Cambridge a partir de 1929, retoma su trabajo en filosofía y revoluciona la filosofía analítica inglesa. Rechaza el principio de verificación por su carácter metafísico y absolutista, y encauza la filosofía hacia el análisis de los diversos juegos lingüísticos que articulan el lenguaje humano, que reivindica como muy rico y sensato en sus manifestaciones no científicas. A diferencia del *primer* Wittgenstein, quien afirma que “el sentido de una proposición es su acuerdo o desacuerdo con las posibilidades de existencia o inexistencia del hecho atómico” (*Tractatus*, 4.2), el *segundo* Wittgenstein subraya que el significado se aprende con el uso: “el significado de una palabra es su uso en el lenguaje” (*Investigaciones Filosóficas*, 43). Este principio de uso lleva a los neopositivistas a revisar sus actitudes rígidas y dirige un nuevo programa de construcción del lenguaje.

Popper considera que el principio de verificación es autocontradictorio, cripto-metafísico e incapaz de explicar las leyes universales de las ciencias empíricas. Karl R. Popper (1902-1994) es un personaje central para la epistemología y la filosofía de la ciencia del siglo XX. Nace en Viena y estudia filosofía, matemática y física; en 1928 se doctora en filosofía. En 1934 publica *The Logic of Scientific Discovery* (traducida como *La lógica de la investigación científica*). En 1937 emigra, huyendo de la persecución nazi y en 1946 se traslada a Inglaterra, donde ocupa una cátedra en la *London School of Economics* (Reale y Antiseri, 1988c).

Aunque Popper está fuertemente vinculado con el *Círculo de Viena*, sus planteamientos filosóficos no son neopositivistas. Neurath lo denomina “oposición oficial” del Círculo, al cual contribuye con la revisión de muchas de sus ideas. Las principales innovaciones que hace Popper al neopositivismo, son:

- Sustituir el principio de verificación (que es un principio de significación) por el criterio de falsación, que es un criterio de demarcación entre ciencia y no ciencia.
- Reemplazar la teoría de la inducción, que consideraba estéril, por el método deductivo de la prueba.
- Sostener que las mejores teorías científicas –en la medida que explican más y pueden controlarse mejor – son las menos probables.
- Reconocer que se pueden engendrar teorías científicas desde la metafísica.

Las aportaciones intelectuales de Popper no se limitan a la epistemología y la filosofía de la ciencia. Su compromiso político y social le llevan a la defensa de la sociedad liberal y a la crítica de los supuestos del socialismo real. Popper es un defensor incansable de la democracia, que concibe como el mantenimiento y perfeccionamiento continuo de determinadas instituciones sociales, en particular de aquellas que permiten a los ciudadanos la posibilidad efectiva de criticar a sus propios gobernantes y de sustituirlos sin derramamiento de sangre. Igualmente son destacables las implicaciones educativas de sus propuestas filosóficas. En este sentido completa la tarea inconclusa del *Círculo de Viena*, que vio cercenadas sus oportunidades para reflexionar y hacer aportaciones sobre el mundo de la educación y de la política.

Entre las terribles consecuencias de la degradación intelectual y moral que supuso el predominio nazi en Europa se encuentra la disgregación de la gran escuela centroeuropea de filosofía de la ciencia, de la que Wittgenstein y Popper son miembros destacados. Viena, como antes ocurrió con Atenas, es centro de la intelectualidad en este periodo. El Círculo hace las veces de Academia durante estos años y actúa como

impulsor y referente de la construcción de los nuevos fundamentos de la ciencia, que continúan durante el siglo XX. La corta vida del Círculo y su desaparición con la segunda guerra mundial impiden un desarrollo teórico sostenido sobre temas educativos y políticos, sobre la vinculación de la ciencia con los valores (Echevarría, 2002). Autores como Russell (1998) y Whitehead (1965) tienen la oportunidad de publicar trabajos sobre educación; tanto Russell como Popper reflexionan ampliamente en la postguerra sobre el compromiso moral y ético del intelectual con la política, pero los miembros del *Círculo de Viena* agotan su ciclo antes que los problemas educativos y políticos se traten de manera determinante, y no sólo de modo teórico como hace Schlick (1978b) con los problemas de la ética.

Instituciones científicas

Desde finales del siglo XIX la ciencia destaca por su impacto social persistente y por el espectacular incremento de resultados que obtiene. Las instituciones científicas inician también en estos años una nueva etapa. La ciencia se considera como actividad productiva y los productos resultantes son los conocimientos. Las ideas son objetos culturales y entidades cognitivas; el significado que alcanzan las observaciones individuales se obtiene por medio de procesos colectivos de comunicación, crítica pública y creación de significado (Ziman, 2003). Ahora bien, la investigación consiste en acciones intencionales para lograr un tipo determinado de conocimientos, para alcanzar unos propósitos concretos. Considerar que el fin de la investigación es la resolución de problemas permite interpretar la investigación como un *proyecto* que se planifica. Para resolver un problema es necesario indicar la cuestión o cuestiones que se quieren indagar y el plan de trabajo que se propone para encontrar las respuestas. Hay un desplazamiento de prioridades desde la producción de ideas a la planificación de proyectos con los que se definen los problemas y el modo en que se quieren abordar (Laudan, 1986).

En los últimos años del siglo XX surge la *sociedad del conocimiento*, que asume que el desarrollo económico y social se sostiene sobre distintas formas de conocimiento, sobre su producción, su adquisición y utilización, su conversión en valor de cambio. Investigación y tecnología constituyen motores del crecimiento económico y la competitividad industrial; son instrumentos primordiales de modernización de las empresas, y contribuyen a mantener, desarrollar y, en su caso, modificar el empleo, directa o indirectamente. Tecnología e investigación desempeñan en nuestra sociedad un papel central para la aplicación de políticas públicas y ocupan un lugar prioritario en el proceso de toma de decisiones. Opciones y decisiones políticas deben asentarse en conocimientos científicamente fundados y, al mismo tiempo, en una comprensión global de los problemas y de sus aspectos sociales y económicos.

Las labores de investigación se realizan en un contexto de aplicación y en marcos institucionales variados: universidades, institutos, empresas y otros consorcios del sector privado. Propósito de la investigación es solucionar problemas que se puedan delimitar de antemano mediante un proyecto. La configuración instrumental de la ciencia hace operativas estas funciones de manera que los proyectos, sostenidos por diversas instituciones sociales, se convierten en instrumentos de política científica. Gobiernos, industrias, sociedades profesionales y otras instituciones financian proyectos de investigación y, de este modo, se hacen partícipes de sus resultados. La combinación de *Investigación Científica* y *Desarrollo Tecnológico* se resume con la expresión “*I+D*”, que sitúa la ciencia como productora de conocimientos para satisfacer unas necesidades materiales. Este modo instrumental de orientación industrial de la ciencia,

que enfatiza los aspectos aplicados del conocimiento, es una de las grandes revoluciones recientes. Se habla de *tecnociencia* para expresar las estrechas relaciones entre ciencia y tecnología (Ziman, 2003).

La producción y gestión de la ciencia han superado el ámbito de las academias tradicionales y se ubica, en la actualidad, en diferentes organismos. La ciencia se lleva a cabo en un conjunto de instituciones, con tradición y disciplina, con trabajadores cualificados y fondos propios. Todos los aspectos sociales de la vida actual –industrial, agrícola, sanitario, educativo, organizativo y, en especial, militar– necesitan de una ciencia organizada para su actividad cotidiana. Las grandes instituciones científicas son algún tipo de organización burocrática, sin responsabilidad educativa y de formación directas, centradas en la gestión, rentabilidad y transferencia del conocimiento científico y de sus resultados, que puede ir desde una Academia Nacional a un Centro Nacional, Consejo de Investigación u otra denominación similar. Este es el caso de importantes instituciones que han tenido un papel determinante en la orientación de la investigación en el siglo XX, como ocurre con la *National Academy of Sciences*, fundada en 1863 por el presidente Lincoln; la *Royal Society*, en su nuevo papel de academia nacional del Reino Unido; la *Academia de Ciencias de la URSS*, surgida en Moscú en 1934 por transformación de la antigua Academia de San Petersburgo; el *Consiglio Nazionale della Ricerche* (CNR), constituido en Italia en 1923; el *Centre Nationale pour la Recherche Scientifique* (CNRS), fundado en Francia en 1936; el *Consejo Superior de Investigaciones Científicas* (CSIC), fundado en España en 1940; la *Fundación Carlsberg* y la *Fundación Nobel*, que han sostenido la actividad científica en los países nórdicos; el *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire* (CERN), fundado en 1954 para coordinar la investigación europea en física de partículas. Éstas y algunas otras instituciones protagonizan la actividad científica de distintos países, orientan su coordinación internacional durante el siglo XX y, la mayor parte de ellas, parecen encarar con dinamismo su continuidad en el siglo XXI. Los fondos de investigación que sustentan estas instituciones dependen directamente de organismos públicos, gobiernos o bien de grandes empresas; estos fondos y subvenciones sostienen los contratos de investigación y desarrollo, permiten la coordinación y el avance de las investigaciones (Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2003; National Academies, 2003).

La adaptación de estas academias a los nuevos retos sociales las convierte en promotoras de investigaciones que se realizan en otros ámbitos y en espacios de encuentro para definir e impulsar la política científica de la sociedad en que se incardinan. Así ocurre en la *Royal Society*, que sitúa su misión en perseguir la excelencia científica, estimular y apoyar a los investigadores para mejorar su práctica y su comunicación, y proporcionar asesoramiento en el Reino Unido (Royal Society, 2003). Cuando observamos la vida interna de las actuales instituciones de promoción, gestión y acción científica, apreciamos enormes diferencias de actuación e, incluso, de principios respecto a las academias tradicionales que hemos analizado (Comisión de las Comunidades Europeas, 2000).

La organización científica actual no está orientada al desarrollo interno de la ciencia; la presencia de un cuerpo amplio y costoso de investigadores dependiente del Estado hace que el futuro de la ciencia esté condicionado por el modo en que se organiza y gestiona la investigación. El empleo de la ciencia es objetivo prioritario en el funcionamiento y evolución de la economía y en la administración de los Estados. Esto ha modificado profundamente los principios, prácticas y finalidades en las instituciones científicas. Se produce un desplazamiento de la ciencia hacia sectores industriales o económicos, lo cual disminuye la independencia de los científicos. La ciencia real se

distancia cada vez más del modo académico tradicional, incluida la ciencia que se hace en la universidad.

Los ideales mertonianos tradicionales han cambiado y se han transformado sus principios. La ciencia desempeña un papel social diferente, regulado por normas distintas y una nueva filosofía de la naturaleza. Se ha producido cierta ruptura con la tradición, derivada de las nuevas condiciones de trabajo, elección de problemas, criterios de éxito y otros referentes sociales. Esto se aprecia principalmente en la organización, dirección y puesta en práctica de la ciencia, que ha experimentado transformaciones radicales. La ciencia está en revisión en todos sus niveles y se replantea su relación con otros agentes e instituciones sociales; esta nueva situación es la que se denomina ciencia *postmoderna* o ciencia *postacadémica*.

Hay múltiples factores que inciden en esta nueva cultura y que configuran la ciencia como sistema dinámico. Hay fuerzas externas, que ejercen presión política, económica o industrial; también hay fuerzas internas que provocan cambios en la autonomía del investigador, en la noción de progreso o en la valoración moral de los productos obtenidos y de su utilidad.

La idea de progreso es una fuerza interna de cambio muy potente en la ciencia. Investigar es una actividad humana radicalmente innovadora. Los niveles alcanzados en el planteamiento y tratamiento de los problemas científicos parecen impedir el avance mediante el trabajo de personas aisladas. Igualmente, las cuestiones que la sociedad plantea a los expertos requieren coordinar el trabajo de especialistas procedentes de campos diferentes. Esta situación afecta a la concepción de la ciencia como actividad individual, y plantea la necesidad de grupos multidisciplinares de trabajo.

El énfasis en la utilidad de los resultados de las investigaciones es otro factor externo que incide en la ciencia postacadémica. El modelo de producción del conocimiento tiene lugar, actualmente, en el contexto de aplicación. Se presiona a la ciencia para que se mantenga al servicio de la sociedad como fuerza impulsora del sistema nacional de I+D, que es motor de desarrollo de la economía. La investigación se presenta expresamente como un sistema para reconocer y resolver problemas prácticos. Se potencia así una norma de utilidad en el conjunto de la cultura de investigación; los descubrimientos se evalúan comercialmente antes de ser validados científicamente. La transición de la ciencia académica a la postacadémica se acompaña de un nuevo lenguaje económico, que incluye términos como administración, contrato, plan estratégico, regulación, competitividad, entrenamiento y empleo, que antes no se habían utilizado en el mundo científico. Los investigadores formulan propuestas para proyectos específicos que son evaluados y obtienen subvenciones según sus méritos.

Competir por la financiación es otra fuerza que guía la investigación. Hay una presión importante que obliga a los científicos a trabajar sobre determinados problemas que proponen los gobiernos y olvidar otros problemas que, a veces, pudieran resultar más interesantes. Este sistema afecta a la noción de que el científico es fuente objetiva de conocimiento especializado; de hecho los contratos gubernamentales para investigar problemas prácticos modifican la percepción que el científico tiene de sí mismo, y lo presentan como asesor técnico, más interesado en cuestiones prácticas que en la comprensión de cuestiones científicas.

La industrialización es un nuevo factor en la ciencia, es decir, el proceso de privatización de algunas de las instituciones dedicadas a la investigación o su mayor vinculación con la industria para obtener productos con valor comercial. En cuestiones técnicas y administrativas la ciencia académica y la ciencia industrial son muy similares, si bien tienen diferencias apreciables en cuanto a objetivos sociales. La ciencia industrial no busca la producción del conocimiento, sino objetivos prácticos.

La ciencia industrial se basa en la propiedad del conocimiento, que no siempre se hace público. Se centra en problemas técnicos locales, con descuido de los problemas generales. En la investigación industrial se trabaja bajo la dirección de una autoridad y no con la libertad de los individuos particulares. Los investigadores persiguen la consecución de objetivos prácticos, y no por el propio conocimiento. Se les contrata en calidad de expertos en resolución de problemas y no por su creatividad personal; no es responsabilidad directa del investigador la resolución de los problemas sino de la institución, quien solicita que la asesoren y toma las decisiones finales.

A diferencia de las normas mertonianas de comunitarismo, universalidad, desinterés, originalidad y escepticismo, el *ethos* de la ciencia industrial se sostiene sobre un nuevo sistema de normas que comprende las nociones de propiedad privada, localismo, autoridad directiva, orientación práctica y asesoramiento experto. Estas nuevas prácticas responden al hecho de que los fines de la investigación se adaptan a los fines materiales de la sociedad llegando, a veces, a la subordinación (Ziman, 2003).

Conclusión

En nuestra reflexión sobre la Academia hemos recorrido momentos históricos diversos en los que esta institución ha tenido un papel creador indiscutible. Estos momentos los han protagonizado personas y grupos singulares, empeñados en mejorar la sociedad en la que vivieron. A lo largo de su historia las academias se han sostenido por el trabajo conjunto de grupos de hombres libres, comprometidos con el conocimiento y la verdad, preocupados por el gobierno de la sociedad a la que pertenecían y por la educación de sus jóvenes conciudadanos. Los miembros de estas instituciones compartieron unos principios, se atuvieron a unas normas, vivieron conforme a unas tradiciones y revolucionaron la cultura de su tiempo por medio de la ciencia. En este camino la organización de la ciencia evolucionó hacia un modelo altamente complejo.

Cada una de las instituciones consideradas ha estado sostenida por una teoría del conocimiento, por un modo de caracterizar conceptos y estructurar ideas; también ha estado vinculada con un programa matemático de investigación. Hemos observado como cada Academia se encuentra comprometida con unos fines educativos, que se articulan por medio de programas de formación; igualmente, estas instituciones han estado comprometidas con el gobierno de la sociedad y han defendido principios éticos e intelectuales. Estos cuatro polos se han presentado mediante sistemas teóricos relacionados que, con el tiempo, se modificaron y lograron precisión, mostraron comprensión por algunos problemas científicos, epistémicos o sociales, y encontraron soluciones acertadas para varios de ellos.

En el estudio hemos apreciado propuestas que mantienen su vigor intelectual, que ayudaron en el razonamiento y sostuvieron la acción. El programa griego sobre el origen del conocimiento, la profunda revisión cultural y educativa renacentista, la genialidad de los conceptos que fundamentan el Análisis Matemático en la Ilustración, la reflexión científica en el positivismo lógico sostenida por los criterios de verificación y demarcación y guiada por la búsqueda de sistemas consistentes y completos, son algunas de esas aportaciones.

Cada una de las épocas estudiadas ha mostrado de forma diferente los vínculos entre matemáticas y educación. El acceso al conocimiento matemático es un interrogante cuyo enunciado se plantea dentro de una teoría general del conocimiento, al contemplar la naturaleza de los entes matemáticos y la posibilidad del propio conocimiento. Se trata de una cuestión importante para la filosofía matemática, que ha

estado presente en las grandes academias y ha ocupado a sus pensadores a lo largo de la historia. Son varias las respuestas aportadas a esta cuestión, entre ellas el idealismo platónico y el funcionalismo galileano. Los entes matemáticos pueden ser expresión de la realidad más elevada, o bien constituir herramientas con que lograr el conocimiento de esa realidad. En cualquier caso, los procesos de transmisión y aprendizaje de esos conocimientos son parte sustantiva de su creación e intelección.

Desde la Academia de Platón, lo matemático, en su sentido original de aprender a conocer aquello que ya conocimos, es la condición fundamental para el saber correcto. Galileo señala que las matemáticas forman parte esencial de las capacidades intelectuales del hombre, son algo cuyo dominio hay que cultivar, sobre lo que hay que educar; son herramientas para leer el libro de la naturaleza. El esfuerzo por esa educación es parte del entrenamiento en el trabajo con las matemáticas. La Ilustración asigna a las matemáticas un papel determinante en el propio proceso de constitución de los conocimientos, las sitúa en la base del saber, del conocer y del aprender, donde la intuición juega un papel central y es objeto de educación. El positivismo muestra cómo los procesos formales, sostenidos por las matemáticas, y los criterios de verificación pueden constituir la estructura del conocimiento científico.

Hemos argumentado que la ciencia real es resultado de una conjunción de teoría del conocimiento, especialización disciplinar, racionalidad educativa y responsabilidad política. Sostenemos que no es conveniente desvincular la teoría del conocimiento de las nociones de bien y de valor, que no es acertado separar el desarrollo de las ideas científicas de su transmisión. El avance de la matemática no puede contraponerse a sus potencialidades y valores educativos. Estas separaciones arruinan la ciencia y perjudican a la sociedad, promueven seres humanos incompletos y desorientan a las instituciones.

El mensaje que transmiten las academias dice con claridad que enseñar y aprender matemáticas son procesos inherentes al propio conocer matemático, forman parte de su agenda de indagación y deben ocupar parte de su tiempo. Educación y matemáticas son dos focos del trabajo académico fuertemente interrelacionados, cuyo progreso conjunto contribuye al desarrollo de la ciencia.

También, cuando hemos llegado a nuestra época, se han hecho evidentes las limitaciones de los grupos académicos en un momento histórico de gran complejidad como el actual, con unas estructuras organizativas y de producción de la ciencia que desbordan el marco en que las academias han realizado su trabajo con anterioridad.

La sociedad actual plantea serios interrogantes a miembros y responsables de instituciones académicas:

- ¿Qué pueden aportar a los modernos sistemas educativos?
- ¿Cómo convivir con los institutos matemáticos altamente especializados?
- ¿Cuál puede ser la contribución a la construcción del conocimiento?
- ¿Con qué ideas y valores participar en el entramado de instituciones políticas?

Las comunidades científicas, las academias locales o nacionales, herederas de la tradición, ¿qué papel pueden desempeñar en el desarrollo de la ciencia y de la educación científica?

Las organizaciones académicas actuales mantienen su importante misión social, que necesita de un compromiso claro. Tal compromiso pasa por revisar y recuperar el programa académico. Con la actualización de este programa, los académicos pueden llevar a cabo la tarea social encomendada y ejercitar su responsabilidad en esta realización, porque los compromisos institucionales afectan a personas concretas:

“La obligación sólo vincula a los seres humanos: No hay obligaciones para las colectividades como tales, pero sí las hay para todos los individuos que componen una colectividad, la sirven, la dirigen o la representan, tanto en la parte de su vida sujeta a la colectividad como en la que es independiente de ella” (Weyl,p. 24).

Hay, finalmente, algunas ideas que queremos destacar. En primer término, subrayamos que una organización consiste, fundamentalmente, en aquello que hacen las personas que la constituyen. Actualizar los valores del científico individual, aun cuando el marco en que se desenvuelve tenga mayor complejidad, es un reto esencial puesto en práctica reiteradas veces por aquellas personas que llevaron la ciencia al lugar que hoy ocupa.

Las instituciones locales tienen que impulsar la vida intelectual de su entorno; conviene ajustar la escala y no dejarse paralizar por las grandes organizaciones.

Apoyar la educación consiste en promover planes de formación que desarrollen la vitalidad, el valor, la sensibilidad, la inteligencia y el sentido crítico de los jóvenes, donde las ciencias sean herramientas para canalizar la curiosidad por conocer y las necesidades de aprender. Igualmente, conviene destacar el compromiso de cada ciudadano con la comunidad a la que pertenece y la obligada participación en su gobierno democrático, mediante puesta en práctica de los valores cívicos de libertad, igualdad, responsabilidad y solidaridad. Sustentar la ciencia y su desarrollo en la promoción de los valores es un reto de nuestra época.

Trabajar con la comunidad científica internacional es otro campo que necesita revisión. Los objetivos de las instituciones académicas actuales marcan líneas claras de actualización en este sentido.

Reflexionar sobre los avances recientes en filosofía de la ciencia y debatir en profundidad los programas epistémicos que hoy día disputan la interpretación del conocimiento resulta obligado para un proyecto de estas características. El contraste entre las investigaciones de las distintas disciplinas científicas permite a los académicos, desde sus áreas de conocimiento y campos de especialización, profundizar en la comprensión de la ciencia de nuestra época y aportar en la difusión de sus ideas. También sirve para tender puentes, necesarios entre las distintas disciplinas.

La elaboración de un plan de trabajo que dé respuesta eficaz a los interrogantes anteriores es una tarea abierta, para cuya realización recibimos ayuda de la historia. No es la primera vez que personas comprometidas con la investigación y con la ciencia se han planteado estas cuestiones, y hemos constatado que otras comunidades han sabido llevar a cabo programas de acción diversos y viables.

Sabemos que este reto afecta a personas e instituciones; también sabemos que el esfuerzo en la participación es la única garantía de que esta apuesta puede ganarse.

Referencias

- Aiton, E. J. (1992). *Leibniz. Una biografía*. Madrid: Alianza Universidad.
- Aristóteles (1994). *Metafísica*. Madrid: Gredos.
- Ayer, A. J. (1978). *El Positivismo Lógico*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Bernal, J. D. (1979). *Historia Social de la Ciencia/ 2. La Ciencia de nuestro tiempo*. Barcelona: Ediciones Península.
- Brunschwig, J.; Lloyd, G. (2000). *El saber griego*. Madrid: Ediciones Akal.
- Bynum, W. F.; Browne, E. J. y Porter, R. (1986). *Diccionario de Historia de la Ciencia*. Barcelona: Editorial Herder.
- Carnap, R. (1992). *Autobiografía intelectual*. Barcelona: Paidós.
- Cid, F. (Dir.) (1982). *Historia de la Ciencia/ 4. Edad Contemporánea*. Barcelona: Editorial Planeta.
- Comisión de las Comunidades Europeas. (2000). *Hacia un espacio europeo de investigación. Comunicación de la Comisión al Consejo, al Parlamento Europeo, al Comité Económico y Social y al Comité de las Regiones*. Bruselas: Diario Oficial de las Comunidades Europeas.
- Consejo Superior de Investigaciones Científicas. (2003). <http://www.csic.es/>
- Crombie, A. C. (1979). *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo/ 2. Siglos XIII a XVII*. Madrid: Alianza Universidad.
- Dieudonné, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Madrid: Alianza.
- Dilthey, W. (1978). *De Leibniz a Goethe*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Dunham, W. (2000). *Euler. El maestro de todos los matemáticos*. Madrid: Nivola.
- Echevarría, J. (2002). *Ciencia y Valores*. Madrid: Destino.
- Euler, L. (1748). *Introductio in Analysis Infinitorum*. Lausanne: Marcum Michaellem Bousquet. (Traducción al castellano: *Introducción al análisis de los infinitos*. (2000). Editores: A. Durán y F. J. Pérez. Sevilla: SAEM Thales)
- Euler, L. (1985). *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*. Madrid: Alianza.
- Euler, L. (1988). *Elements of Algebra*. Berlín: Springer-Verlag.
- Feijoo, B. (1781). *Teatro Crítico Universal*. Madrid: Blas Román, Impresor de la Real Academia de Derecho Español y Público.
- Frege, G. (1972). *Fundamentos de la Aritmética*. Barcelona: Editorial Laia.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Galileo Galilei (1980). *Diálogo sobre los sistemas máximos. Jornada Primera*. Buenos Aires: Aguilar.
- Galileo Galilei (1975). *Diálogo sobre los sistemas máximos. Jornada Segunda*. Buenos Aires: Aguilar.
- Galileo Galilei (1977). *Diálogo sobre los sistemas máximos. Jornada Tercera*. Buenos Aires: Aguilar.
- Galileo Galilei (1976). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Madrid: Editora Nacional.
- Geymonat, L. (1985). *Historia de la Filosofía y de la Ciencia. 2 Del Renacimiento a la Ilustración*. Barcelona: Editorial Crítica.
- Grattan-Guinness, I. (comp.) (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Universidad.

- Grattan-Guinness, I. (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. Volume 2*. London: Routledge.
- Guthrie, W. K. (1990). *Historia de la Filosofía Griega. IV*. Madrid: Gredos.
- Guthrie, W. K. (1992). *Historia de la Filosofía Griega. V*. Madrid: Gredos.
- Guzmán, M. (1983). *Impactos del Análisis Armónico*. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Hall, A. R. (1985). *La Revolución Científica 1500-1750*. Barcelona: Editorial Crítica.
- Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics. Volume I: From Thales to Euclid*. New York: Dover Publications.
- Heidegger, M. (1975). *La pregunta por la cosa*. Buenos Aires: Editorial Alfa Argentina.
- Hilbert, D. (1990). *Sur les problèmes futures des Mathématiques. Les 23 problèmes*. París: Gauthier-Villars.
- Hilbert, D. (1993). La fundamentación de la teoría elemental de números. En *Fundamentos de las Matemáticas*. México: Mathema.
- Honderich, T. (ed.) (2001). *Enciclopedia Oxford de Filosofía*. Madrid: Tecnos.
- Jaeger, W. (1957). *Paideia*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Janick, A.; Toulmin, S. (1998). *La Viena de Wittgenstein*. Madrid: Taurus.
- Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Universidad.
- Körner, S. (1984). *Cuestiones fundamentales de filosofía*. Barcelona: Ariel.
- Lamanna, E. P. (1964). *Historia de la Filosofía III. De Descartes a Kant*. Buenos Aires: Librería Hachette.
- Laudan, L. (1986). *El progreso y sus problemas*. Madrid: Ediciones Encuentro.
- Leibniz, G. W. (1977). *Discurso de Metafísica*. México: Editorial Porrúa.
- Leibniz, G. W. (1977). *Monadología*. México: Editorial Porrúa.
- Leibniz, G. W. (1977). *Nuevo Tratado sobre el Entendimiento Humano*. México: Editorial Porrúa.
- Leibniz, G. W. (2001). *Methodus Vitae. Vol. II. Individuo o Mónada*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Leibniz, G. W. (2001). *Methodus Vitae. Vol. III. Ética o Política*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- López Piñero, J. M. (Dir.) (2002). *Historia de la Ciencia y de la Técnica en la Corona de Castilla, III. Siglos XVI y XVII*. Salamanca: Junta de Castilla y León.
- Maceiras, M.; López, A.; Maestre, A. y Trías, S. (2002). *Pensamiento Filosófico Español, Volumen I. De Séneca a Suárez*. Madrid: Síntesis.
- Merton, R. (1984). *Ciencia tecnología y sociedad en la Inglaterra del siglo XVII*. Madrid: Alianza.
- Merton, R. (1985). *La Sociología de la Ciencia*. Madrid: Alianza.
- Mieli, A. (1954). *Panorama General de Historia de la Ciencia III. La Eclósión del Renacimiento*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
- Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid: Espasa.
- Nagi, S.; Corwin, R. (1972). *The Social Contexts of Research*. London: John Wiley & Sons.

- National Academies. (2003). *About the National Academy of Sciences*. <http://www4.nationalacademies.org/nas/>
- Peano, G. (1979). *Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método*. Oviedo: Pentalfa Ediciones.
- Platón (1979). *Obras Completas*. Madrid: Aguilar.
- Popper, K. (1980). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos.
- Popper, K. (1979). *El desarrollo del conocimiento científico. Conjeturas y refutaciones*. Buenos Aires: Paidós.
- Popper, K. (1998) *Los dos problemas fundamentales de la Epistemología*. Madrid: Tecnos.
- Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (2003). <http://www.racefyn.insde.es/>
- Reale, G.; Antiseri, D. (1988a). *Historia del pensamiento filosófico y científico I. Antigüedad y Edad Media*. Barcelona: Editorial Herder.
- Reale, G.; Antiseri, D. (1988b). *Historia del pensamiento filosófico y científico II. Del humanismo a Kant*. Barcelona: Editorial Herder.
- Reale, G.; Antiseri, D. (1988c). *Historia del pensamiento filosófico y científico III. Del romanticismo hasta hoy*. Barcelona: Editorial Herder.
- Restivo, S. (1992). *Mathematics in Society and History*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Royal Society (2003). *The Royal Society and its Fellows*. <http://www.royalsoc.ac.uk/>
- Russell, B. (1973a). *Historia de la filosofía*. En: *Obras Completas I*. Madrid: Aguilar.
- Russell, B. (1973b). *Los Principios de la Matemática*. En: *Obras Completas II*. Madrid: Aguilar.
- Russell, B. (1973c). *Nuestro conocimiento del mundo exterior*. En: *Obras Completas II*. Madrid: Aguilar.
- Russell, B. (1998). *Sobre educación*. Madrid: Espasa. Colección Austral.
- Schlick, M. (1978a). El viraje de la filosofía. En Ayer, J.: *El positivismo lógico*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Schlick, M. (1978b). ¿Qué pretende la ética? En Ayer, J.: *El positivismo lógico*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Taton, R. (Dir.) (1975). *La Ciencia contemporánea II. El siglo XX*. Barcelona: Ediciones Destino.
- Torrini, M. (2000). Platonismo y Revolución Científica. En Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia: *Galileo y la gestación de la Ciencia Moderna. Acta IX*. Tenerife: Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.
- Toulmin, S. (2001). *Cosmópolis. El trasfondo de la modernidad*. Barcelona: Península.
- Watson, P. (2002). *Historia intelectual del siglo XX*. Barcelona: Crítica.
- Weyl, S. (1996). *Echar raíces*. Madrid: Editorial Trotta.
- Wittgenstein, L. (1973). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Madrid: Alianza.
- Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Editorial Crítica.
- Whitehead, A. (1965). *Los fines de la educación*. Buenos Aires: Paidós.
- Ziman, J. (1986). *Introducción al estudio de las ciencias*. Barcelona: Ediciones Ariel.
- Ziman, J. (2003). *¿Qué es la ciencia?* Madrid: Cambridge University Press.